UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID

EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LAS ENSEÑANZAS UNIVERSITARIAS OFICIALES DE GRADO

Curso **2022-2023**

MATERIA: **MATEMÁTICAS II**

C

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente el examen, responda razonadamente **cuatro** preguntas cualesquiera a elegir entre las ocho que se proponen. **Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas**

CALIFICACIÓN: Cada pregunta se calificará sobre 2.5 puntos.
TIEMPO: 90 minutos.

A.1. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dada la matriz real $A = \begin{pmatrix} 2a & 1 & 1 \\ a & 3 & -6 \\ a+1 & 1 & a \end{pmatrix}$, se pide:

a) (1 punto) Estudiar el rango de la matriz A en función del parámetro a.

b) (1 punto) Calcular, en el caso de que exista, la inversa de A para $a = 0$.

c) (0.5 puntos) Resolver el sistema $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ para el caso $a = 1$.

A.2. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dada la función $f(x) = x^3 + x^2 + x$, se pide:

a) (1.25 puntos) Calcular la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ con mínima pendiente.

b) (1.25 puntos) Calcular el área de la región acotada comprendida entre la gráfica $f(x)$ y la recta $y = x$.

A.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Sean los planos $\pi_1 : y = x$, $\pi_2 : y = x + 1$, $\pi_3 : z = -1$ y $\pi_4 : z = 1$.

a) (0.5 puntos) Compruebe que son paralelos los planos π_1 y π_2, y que son paralelos los planos π_3 y π_4.

b) (0.5 puntos) Compruebe que los planos π_1 y π_2 son perpendiculares a los planos π_3 y π_4.

c) (0.5 puntos) Halle una recta que sea paralela a los cuatro planos y pase por el punto $(1, 0, 2)$.

d) (1 punto) Halle dos planos perpendiculares a π_1, π_2, π_3 y π_4, que cumplan que el volumen del paralelepípedo comprendido entre los seis planos sea 1.

A.4. Calificación máxima: 2.5 puntos.

En los juegos de rol, cada vez que se lanza un ataque este puede resultar en golpe crítico o no.

a) (1.25 puntos) En cierto juego de rol, para determinar si un ataque es crítico o no, se tira una moneda a cara o cruz. Si se obtiene una cruz, el ataque no será crítico. Por contra, si se obtiene una cara, entonces se lanza un dado de 10 caras numeradas del 1 al 10. Solo en caso de que también se obtenga una puntuación mayor o igual a 9 en el dado el ataque es crítico; en caso contrario el ataque no será crítico. Calcule la probabilidad de que, de entre 5 ataques lanzados, se obtengan 3 o menos golpes críticos.

b) (1.25 puntos) En otro juego de rol se sabe que la probabilidad de ataque crítico es del $20\,\%$. Aproximando mediante una distribución normal, calcule la probabilidad de que, de entre 100 ataques, se obtengan no menos de 15 y no más de 25 golpes críticos.

B.1. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Un dietista veterinario ha establecido la alimentación diaria (en términos de grasas, carbohidratos y proteínas) de un quebrantahuesos pirenaico que se ha recogido en el hogar de recuperación de fauna en el que trabaja. Se sabe que el quebrantahuesos necesita 500 g de alimento al día y que necesita 2500 Kcal. También se sabe que cada gramo de grasa proporciona 9 Kcal, cada gramo de carbohidratos 4 Kcal y cada gramo de proteínas 4 Kcal. Debido a que el ave ha llegado en un estado de debilidad, el veterinario estima que el consumo de carbohidratos debe ser 40 g más del doble de proteínas. Determine la cantidad de kilocalorías diaria que obtendrá el quebrantahuesos procedentes de grasas, de carbohidratos y de proteínas.

B.2. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dada la función $f(x) = \dfrac{|x^2 - x - 2|}{x^2 + 2x + 1}$, se pide:

a) (1 punto) Hallar, si existen, las asíntotas de la gráfica de f.

b) (1.5 puntos) Estudiar los intervalos de crecimiento y de decrecimiento y calcular, si existen, sus extremos relativos.

B.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dadas la recta $r \equiv \dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z+2}{-1}$ y los planos $\pi : x + 2y + 2z - 1 = 0$ y $\pi' : 2x + 2y + z + 4 = 0$, se pide:

a) (0.75 puntos) Comprobar que los planos π y π' se cortan. Hallar el ángulo que forman.

b) (0.75 puntos) Estudiar la posición relativa de r y π. Hallar, si es posible, el punto de corte.

c) (1 punto) Hallar los puntos de la recta r que equidistan de los planos π y π'.

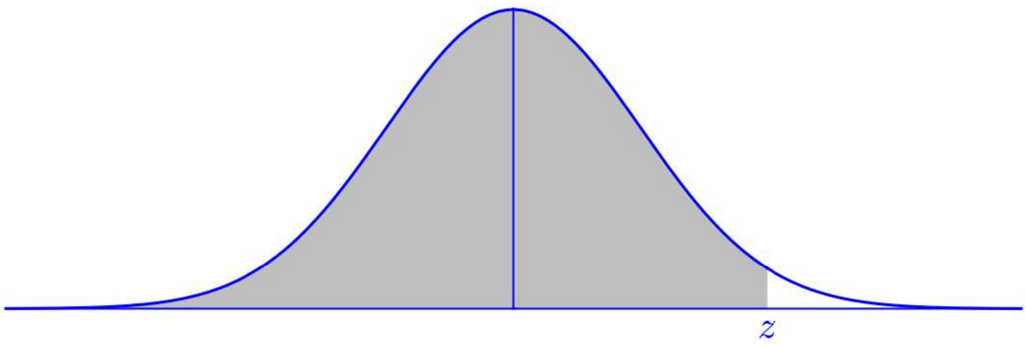
B.4. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Siete de cada veinte personas que entran en cierta joyería acaban comprando algún artículo. El $75\,\%$ de las personas que se marchan sin comprar nada tienen menos de 50 años y el $80\,\%$ de las personas que realizan alguna compra tienen al menos 50 años. Entra un cliente en la joyería. Se pide:

a) (1.25 puntos) Calcular la probabilidad de que sea menor de 50 años.

b) (1.25 puntos) Sabiendo que tiene como mínimo 50 años, hallar la probabilidad de que salga de la tienda sin haber comprado nada.

Distribución Normal



Ejemplo: si Z tiene distribución $\mathrm{N}(0,1)$, $P(Z < 0{,}45) = 0{,}6736$.

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990

MATEMÁTICAS II

CRITERIOS ESPECÍFICOS DE CORRECCIÓN Y ESTÁNDARES EVALUADOS EN CADA PREGUNTA

En cada pregunta, aunque el procedimiento seguido sea diferente al propuesto en el documento soluciones, cualquier argumento válido que conduzca a la solución será valorado con la puntuación asignada.
Los estándares de aprendizaje del bloque 1 se evaluarán transversalmente en todos los ejercicios, penalizando en la calificación de cada respuesta la falta de justificación razonada o de precisión y valorando las estrategias, razonamientos y toma adecuada de decisiones.

A.1.

a) Cálculo de los valores a estudiar: 0.5 puntos. Discusión de los casos: 0.5 puntos.
b) Discusión de la existencia de inversa: 0.25 puntos. Cálculo de la inversa: 0.75 puntos.
c) Planteamiento: 0.25 puntos. Resolución: 0.25 puntos.

Estándares de aprendizaje evaluados: Determina el rango de una matriz, hasta orden 4, aplicando el método de Gauss o determinantes. Determina las condiciones para que una matriz tenga inversa y la calcula empleando el método más adecuado. Resuelve problemas susceptibles de ser representados matricialmente e interpreta los resultados.

A.2.

a) Determinación del punto de pendiente mínima: 0.5 puntos. Obtención de la ecuación de la recta tangente: 0.75 puntos.
b) Determinación de los puntos de corte: 0.5 puntos. Cálculo de la primitiva: 0.5 puntos. Obtención del área: 0.25 puntos.

Estándares de aprendizaje evaluados: Aplica los conceptos de límite y de derivada, así como los teoremas relacionados, a la resolución de problemas. Aplica los métodos básicos para el cálculo de primitivas de funciones. Calcula el área de recintos limitados por rectas y curvas sencillas o por dos curvas.

A.3.

a) Planteamiento: 0.25 puntos. Resolución: 0.25 puntos.
b) Planteamiento: 0.25 puntos. Resolución: 0.25 puntos.
c) Planteamiento: 0.25 puntos. Resolución: 0.25 puntos.
d) Planteamiento: 0.5 puntos. Resolución: 0.5 puntos.

Estándares de aprendizaje evaluados: Determina ángulos, distancias, áreas y volúmenes utilizando los productos escalar, vectorial y mixto, aplicándolos en cada caso a la resolución de problemas geométricos. Obtiene las ecuaciones de rectas y planos en diferentes situaciones.

A.4.

a) Identificación del uso de la distribución binomial: 0.5 puntos. Cálculo de p: 0.25 puntos. Descomposición de la condición $P(X \leq 3)$ en fenómenos más simples: 0.25 puntos. Cálculo correcto del resultado: 0.25 puntos.
b) Planteamiento y aproximación por la normal: 0.75 puntos. Resolución: 0.5 puntos. Si no se hace la corrección por continuidad o se hace de manera incorrecta, se descontarán 0.25 puntos.

Estándares de aprendizaje evaluados: Calcula la probabilidad de sucesos en experimentos simples y compuestos mediante la regla de Laplace, las fórmulas derivadas de la axiomática de Kolmogorov y diferentes técnicas de recuento. Calcula probabilidades asociadas a una distribución binomial a partir de su función de probabilidad, de la tabla de la distribución o mediante calculadora. Calcula probabilidades de sucesos asociados a fenómenos que pueden modelizarse mediante la distribución normal a partir de la tabla de la distribución o mediante calculadora.

B.1.

Planteamiento del problema: 1.5 puntos (0.5 puntos por cada ecuación bien planteada). Resolución del sistema planteado: 0.75 puntos. Escritura correcta de la solución como Kcal procedentes de grasas, carbohidratos y proteínas: 0.25 puntos. En caso de resolución correcta de un sistema con alguna ecuación mal planteada, se valorará con hasta 0.5 puntos.

Estándares de aprendizaje evaluados: Utiliza el lenguaje matricial para representar datos facilitados mediante tablas o grafos y para representar sistemas de ecuaciones lineales. Formula algebraicamente las restricciones indicadas en una situación de vida real, estudia y clasifica el sistema de ecuaciones planteado, lo resuelve en los casos que sea posible y lo aplica para resolver problemas.

B.2.

a) Planteamiento: 0.5 puntos. Resolución: 0.5 puntos.
b) Planteamiento crecimiento: 0.5 puntos. Resolución crecimiento: 0.5 puntos. Planteamiento extremos relativos: 0.25 puntos. Resolución extremos relativos: 0.25 puntos.

Estándares de aprendizaje evaluados: Conoce las propiedades de las funciones continuas, y representa la función en un entorno de los puntos de discontinuidad. Aplica los conceptos de límite y de derivada, así como los teoremas relacionados, a la resolución de problemas. Aplica la regla de L'Hôpital para resolver indeterminaciones en el cálculo de límites.

B.3.

a) Comprobar que π y π' se cortan: 0.25 puntos. Hallar el ángulo: 0.5 puntos.
b) Comprobar que r corta a π : 0.25 puntos. Hallar el punto de corte: 0.5 puntos.
c) Planteamiento: 0.5 puntos. Solución: 0.5 puntos (0.25 puntos por cada uno de los dos puntos).

Estándares de aprendizaje evaluados: Utiliza argumentos, justificaciones, explicaciones y razonamientos explícitos y coherentes. Realiza operaciones elementales con vectores, manejando correctamente los conceptos de base y de dependencia e independencia lineal. Expresa la ecuación de la recta de sus diferentes formas, pasando de una a otra correctamente, identificando en cada caso sus elementos característicos, y resolviendo los problemas afines. Analiza la posición relativa de planos y rectas en el espacio, aplicando métodos matriciales y algebraicos. Maneja el producto escalar y vectorial de dos vectores, significado geométrico, expresión analítica y propiedades. Determina ángulos, distancias, áreas y volúmenes utilizando los productos escalar, vectorial y mixto, aplicándolos en cada caso a la resolución de problemas geométricos.

B.4.

a) Planteamiento: 0.75 puntos. Resolución: 0.5 puntos.
b) Planteamiento: 0.75 puntos. Resolución: 0.5 puntos.
Nota: No se penalizará dos veces una solución incorrecta del apartado a). Es decir, si la solución del apartado b) está bien razonada pero es incorrecta porque está apoyada en una solución incorrecta del apartado a), el apartado b) deberá valorarse como correcto.

Estándares de aprendizaje evaluados: Calcula la probabilidad de sucesos en experimentos simples y compuestos mediante la regla de Laplace, las fórmulas derivadas de la axiomática de Kolmogorov y diferentes técnicas de recuento. Calcula la probabilidad final de un suceso aplicando la fórmula de Bayes. Utiliza un vocabulario adecuado para describir situaciones relacionadas con el azar.

MATEMÁTICAS II–SOLUCIONES
(Documento de trabajo orientativo)

A.1.

a) El determinante de la matriz A es $5a^2+4a-9$ que se anula para $a=1$ y $a=-9/5$. Para los valores de a distintos de 1 y $-9/5$ el rango de A es tres y para $a=1,-9/5$ es dos.

b) El rango de A para $a=0$ es tres, luego la inversa existe. Para $a=0$ la inversa de A es $\begin{pmatrix} -2/3 & -1/9 & 1 \\ 2/3 & 1/9 & 0 \\ 1/3 & -1/9 & 0 \end{pmatrix}$.

c) Para $a=1$, primera y tercera fila de la matriz A son iguales. Por lo tanto, el sistema se reduce a dos ecuaciones linealmente independientes cuya solución viene dada por $(x,y,z)=\left(-\frac{9}{5}\lambda, \frac{13}{5}\lambda, \lambda\right)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

A.2.

a) La pendiente de la recta tangente en x viene dada por el valor $m(x)=f'(x)=3x^2+2x+1$, que posee un mínimo cuando $m'(x)=6x+2=0$, es decir, en $x=-1/3$. Así pues, la ecuación de dicha recta será $y=f'(-1/3)(x+1/3)+f(-1/3)=\frac{2}{3}\left(x+\frac{1}{3}\right)-\frac{7}{27}=\frac{2}{3}x-\frac{1}{27}$.

b) La gráfica de $f(x)$ y la recta $y=x$ se cortan en -1 y 0. El área es $\int_{-1}^{0}|f(x)-x|dx=\int_{-1}^{0}(x^3+x^2)dx=\frac{1}{12}$.

A.3.

a) Son paralelos debido a que la normal de los planos π_1 y π_2 es $n_1=(1,-1,0)$, y la de los planos π_3 y π_4 es $n_2=(0,0,1)$, y además $\pi_1\neq\pi_2$ y $\pi_3\neq\pi_4$.
b) Son perpendiculares porque $n_1\cdot n_3=0$.
c) La dirección de la recta buscada es perpendicular a n_1 y n_2, por lo que su vector director es $(1,1,0)$. Como pasa por el punto $(1,0,2)$, una ecuación suya será $y=x-1, z-2=0$.
d) Los planos buscados tendrán como vector normal $n_1\times n_2=(1,1,0)$, con ecuaciones $x+y=D_1$ y $x+y=D_2$. La distancia entre ellos es $\frac{|D_1-D_2|}{\sqrt{2}}$. La distancia entre π_3 y π_4 es 2, y la distancia entre π_1 y π_2 es $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Por tanto el volumen del ortoedro es $V=1=\frac{|D_1-D_2|}{\sqrt{2}}\frac{2}{\sqrt{2}}=|D_1-D_2|$. En consecuencia, un ejemplo de estos dos planos es $x+y=0$ y $x+y=1$.

A.4.

a) Sea A el suceso obtener cara (que tiene $P(A)=0.5$) y sea B el suceso obtener ≥ 9 en el dado (que tiene $P(B)=2/10$). Como tirar la moneda y tirar el dado son sucesos intependientes, tenemos que la probabilidad de tener un golpe crítico es $P(A\cap B)=P(A)P(B)=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{10}=0.1$. La variable aleatoria que modeliza el número de golpes críticos es $X\sim \mathrm{B}(5,0.1)$. De este modo, se tiene

$$P(X>3)=P(X=4)+P(X=5)=\binom{5}{4}(0.1)^4\cdot(0.9)+\binom{5}{5}(0.1)^5=0.00046.$$

Por tanto, $P(X\leq 3)=1-P(X>3)=0.99954$.

b) Sea Y la variable aleatoria buscada, que es una binomial con parámetros $p=0.2$ y $n=100$. Aproximamos Y por una variable aleatoria $Y'\sim N(np,\sqrt{npq})=N(20,4)$. De este modo, si denotamos $Z\sim N(0,1)$, obtenemos

$$\begin{aligned} P(15\leq Y\leq 25) &= P(14.5<Y'<25.5)=P\left(\frac{14.5-20}{4}<Z<\frac{25.5-20}{4}\right)=P\left(-\frac{55}{40}<Z<\frac{55}{40}\right) \\ &\approx 2P(Z<1.38)-1\approx 0.8324. \end{aligned}$$

B.1.

Si x es la cantidad diaria de grasas de la dieta del quebrantahuesos, en gramos, y es la cantidad de carbohidratos, y z es la cantidad de proteínas, el sistema de ecuaciones que tenemos que resolver es

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+y+z & = & 500 \\ 9x+4y+4z & = & 2500 \\ y & = & 2z+40 \end{array}\right. .$$

La solución del sistema es $x=100$, $y=280$, $z=120$. Por lo tanto, el quebrantahuesos obtiene diariamente 900 Kcal procedentes de grasas, 1120 Kcal procedentes de carbohidratos y 480 Kcal procedentes de proteínas.

B.2.

a) El denominador de la expresión racional que define a la función se anula en $x=-1$ y es siempre positivo: $x^2+2x+1=(x+1)^2$. Por su parte el numerador, que siempre es positivo, también se anula en $x=-1$: $|x^2-x-2|=|(x+1)(x-2)|$. Así, $\lim\limits_{x\to -1} f(x)=\lim\limits_{x\to -1}\frac{|x-2|}{|x+1|}=+\infty$, y la recta $x=-1$ es una asíntota vertical.

Puesto que $x^2+2x+1\geq 0$ para cualquier $x\in\mathbb{R}$, $\lim_{x\to\pm\infty}\dfrac{|x^2-x-2|}{x^2+2x+1}=\lim_{x\to\pm\infty}\dfrac{|x^2-x-2|}{|x^2+2x+1|}=\left|\lim_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^2-x-2}{x^2+2x+1}\right|=1$, la recta $y=1$ es una asíntota horizontal tanto cuando $x\to+\infty$ como cuando $x\to-\infty$. En particular, no hay asíntotas oblicuas.

b) La función está definida en $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$, es siempre no negativa, $f(2)=0$ y se puede expresar como

$$f(x)=\left\{\begin{array}{ll} \frac{(2-x)(x+1)}{(x+1)^2}=\frac{2-x}{x+1} & \text{si } -1<x\leq 2 \\ \frac{(x-2)(x+1)}{(x+1)^2}=\frac{x-2}{x+1} & \text{si } x<-1 \text{ o } x>2. \end{array}\right.$$

Es derivable en $(-\infty,-1)\cup(-1,2)\cup(2,+\infty)$ con derivada:

$$f'(x)=\left\{\begin{array}{ll} \frac{-3}{(x+1)^2} & \text{si } -1<x<2 \\ \frac{3}{(x+1)^2} & \text{si } x<-1 \text{ o } x>2 \end{array}\right. ,\quad \text{de donde } \left\{\begin{array}{ll} f'(x)<0 & \text{si } -1<x<2 \\ f'(x)>0 & \text{si } x<-1 \text{ o } x>2 \end{array}\right. .$$

Aplicando el criterio de la primera derivada tenemos así que f es creciente en $(-\infty,-1)$ y $(2,+\infty)$ y decreciente en el intervalo $(-1,2)$. Por tanto, existe un único extremo relativo, un mínimo, en $x=2$ de valor $f(2)=0$.

B.3.

a) Como $\overrightarrow{n_\pi}=(1,2,2)$ y $\overrightarrow{n_{\pi'}}=(2,2,1)$, se tiene que rango $(\overrightarrow{n_\pi},\overrightarrow{n_{\pi'}})=2\Rightarrow \pi$ y π' se cortan. Sea $\alpha=(\widehat{\pi,\pi'})=(\widehat{\overrightarrow{n_\pi},\overrightarrow{n_{\pi'}}})\Rightarrow \cos\alpha=\frac{|\overrightarrow{n_\pi}\cdot\overrightarrow{n_{\pi'}}|}{|\overrightarrow{n_\pi}|\cdot|\overrightarrow{n_{\pi'}}|}=\frac{8}{3\cdot 3}=\frac{8}{9}\Rightarrow\alpha=\arccos\frac{8}{9}$.

b) La recta r tiene vector director $\overrightarrow{d_r}=(3,1,-1)$ y el plano π tiene vector normal $\overrightarrow{n_\pi}=(1,2,2)$. Como $\overrightarrow{d_r}\cdot\overrightarrow{n_\pi}=3\neq 0\Rightarrow r$ corta a π. Sea $\{P\}=r\cap\pi$.

Como $r\equiv\left\{\begin{array}{l} x=1+3\lambda \\ y=\lambda \\ z=-2-\lambda \end{array}\right.\Rightarrow 1+3\lambda+2\lambda-4-2\lambda-1=0\Leftrightarrow\lambda=4/3$, luego $P\left(5,\frac{4}{3},-\frac{10}{3}\right)$.

c) Tomamos $P_r(1+3\lambda,\lambda,-2-\lambda)$ punto genérico de r. Buscamos los puntos P_r tales que $d(P_r,\pi)=d(P_r,\pi')\Rightarrow$
$\frac{|1+3\lambda+2\lambda-4-2\lambda-1|}{\sqrt{9}}=\frac{|2+6\lambda+2\lambda-2-\lambda+4|}{\sqrt{9}}\Rightarrow|3\lambda-4|=|7\lambda+4|\Rightarrow\left\{\begin{array}{l} 3\lambda-4=7\lambda+4\Rightarrow\lambda=-2\Rightarrow P_1(-5,-2,0) \\ 3\lambda-4=-7\lambda-4\Rightarrow\lambda=0\Rightarrow P_2(1,0,-2) \end{array}\right.$.

B.4.

Sean $C\equiv$ Comprar algún artículo y $M\equiv$ Menor de 50 años.

a) $P(M)=P(M\mid C)\cdot P(C)+P(M\mid\overline{C})\cdot P(\overline{C})=0.2\cdot 0.35+0.75\cdot 0.65=0.5575.$

b) $P(\overline{C}\mid\overline{M})=\dfrac{P(\overline{M}\mid\overline{C})\cdot P(\overline{C})}{P(\overline{M})}=\dfrac{0.25\cdot 0.65}{1-0.5575}\approx 0.3672.$