	UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LAS ENSEÑANZAS UNIVERSITARIAS OFICIALES DE GRADO Curso **2022-2023** **MATERIA: MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II**	**D**

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente todas las preguntas, el alumno deberá responder razonadamente a **cinco** preguntas cualesquiera a elegir entre las diez que se le proponen.
Cada ejercicio se valorará sobre 2 puntos, y si consta de dos apartados, cada apartado se valorará sobre 1 punto.
DURACIÓN: 90 minutos.

A.1. (2 puntos) Se considera la matriz A dada por

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Estudie si la matriz A es invertible y, en caso afirmativo, calcule su inversa.
b) Determine la matriz X tal que

$$A \cdot X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

A.2. (2 puntos) Se considera la función real de variable real definida por la siguiente expresión:

$$f(x) = 6x^2 + ae^x - 2, \quad a \in \mathbb{R}$$

a) Obtenga el valor del parámetro real a sabiendo que $\int_0^1 f(x)\,dx = e - 1$.
b) Para $a = 1$, obtenga la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 0$.

A.3. (2 puntos) Se considera la función real de variable real definida por la siguiente expresión:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{-x^4}{x^2+1} & si \quad x \leq 0 \\ \\ \frac{x^2+1}{x+1} & si \quad x > 0 \end{cases}$$

a) Indique el dominio de la función $f(x)$ y analice su continuidad, señalando el tipo de discontinuidad si la presenta.
b) Determine las asíntotas de la función anterior.

A.4. (2 puntos) Sean dos sucesos A y B tales que $P(A) = 0,55$ y $P(B) = 0,1$. Además se sabe que $P(\bar{B} \mid A) = 0,89$, donde $\bar{B}$ es el suceso complementario de B. Calcule las siguientes probabilidades:
a) $P(A \cap B)$.
b) $P(\bar{A} \cap \bar{B})$, siendo $\bar{A}$ el suceso complementario de A .

A.5. (2 puntos) La capacidad en mililitros de un bote de champú se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ y desviación típica igual a 10 ml.
a) Se toma una muestra aleatoria de tamaño 20 y se obtiene que su media muestral es de 200 ml. Determine un intervalo de confianza del $95\,\%$ para la capacidad media de los botes de champú.
b) Determine el tamaño mínimo de la muestra para que el error máximo cometido en la estimación de la media sea menor que $0{,}5$ mililitros, con un nivel de confianza del $90\,\%$.

B.1. (2 puntos) Una pastelería tiene 220 buñuelos de chocolate, nata y crema. Hay el doble de buñuelos de nata que de crema. Además, el doble de la cantidad de los buñuelos de crema más el triple de los buñuelos de chocolate es igual al doble de la cantidad de los buñuelos de nata. Calcule la cantidad de buñuelos que hay de cada tipo.

B.2. (2 puntos) Se desea producir pintura verde en dos tonalidades, VERDE1 y VERDE2, mezclando pintura azul y amarilla en distintas proporciones. Un litro de pintura VERDE1 necesita 0,3 litros de azul y 0,7 litros de amarillo, mientras que un litro de pintura VERDE2 necesita 0,5 litros de azul y 0,5 litros de amarillo. Actualmente se dispone de 20 litros de azul y 28 litros de amarillo. El beneficio por litro de la pintura VERDE1 es de 1 euro, y por litro de pintura VERDE2 es de 1,2 euros. No se pueden producir más de 30 litros de pintura VERDE1. ¿Cuántos litros de pintura VERDE1 y VERDE2 debe producir para maximizar sus beneficios? ¿Cuál será el beneficio obtenido?

B.3. (2 puntos) Se consideran las siguientes funciones reales de variable real:

$$f(x) = -x^3 + 2x^2 + 4x, \qquad g(x) = 4x$$

a) Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)$.
b) Calcule el área de la región acotada limitada por las gráficas de las funciones $f(x)$ y $g(x)$ en el primer cuadrante del plano cartesiano.

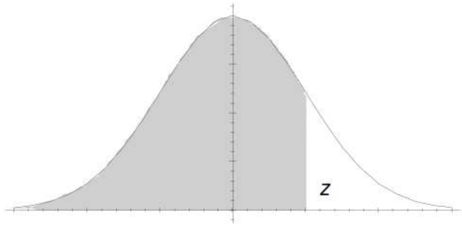
B.4. (2 puntos) El Ministerio de Educación y Formación Profesional convoca regularmente unas ayudas al estudio. En el curso 2019-2020 las ayudas destinadas a las Enseñanzas Obligatorias representaron el $56{,}5\,\%$ del total, el $24\,\%$ correspondieron a Enseñanzas Universitarias, mientras que el $19,5\,\%$ restante fueron para Enseñanzas Postobligatorias No Universitarias. Las ayudas concedidas son financiadas o bien por el ministerio o bien por la Comunidad Autónoma a la que pertenece el estudiante. Concretamente, en el curso 2019-2020, las ayudas financiadas por el ministerio representaron el $13{,}8\,\%$ del total de ayudas de Enseñanzas Obligatorias, el $86{,}1\,\%$ de las Universitarias y el $80{,}3\,\%$ de las Postobligatorias No Universitarias. Eligiendo una ayuda al estudio al azar de las anteriormente descritas, calcule la probabilidad de que:
a) Sea financiada por el ministerio.
b) La ayuda sea de Enseñanza Obligatoria, sabiendo que ha sido financiada por el ministerio.

B.5. (2 puntos) El $30\,\%$ de los individuos de una población tienen una titulación universitaria. Se escoge una muestra al azar de 120 individuos.
a) ¿Cuál es la distribución aproximada que sigue la proporción de individuos con titulación universitaria de la muestra?
b) Halle la probabilidad de que más del $35\,\%$ de los individuos de la muestra sean titulados universitarios.

Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales

ÁREAS BAJO LA DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD NORMAL ESTÁNDAR

Los valores en la tabla representan el área bajo la curva normal hasta un valor positivo de *z*.



z	,00	,01	,02	,03	,04	,05	,06	,07	,08	,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7703	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9954	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990

MATEMATICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

CRITERIOS ESPECÍFICOS DE CORRECCIÓN Y CALIFICACIÓN

ATENCIÓN: La calificación debe hacerse en múltiplos de 0,25 puntos

OPCIÓN A

Ejercicio 1. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Apartado (a): 1 punto.

Justificación de la existencia de la inversa .... 0,25 puntos.

Cálculo correcto de la inversa .... 0,75 puntos.

Apartado (b): 1 punto.

Despeja correctamente X.. 0,50 puntos.

Solución correcta de la ecuación .... 0,50 puntos

Ejercicio 2. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Apartado (a): 1 punto.

Expresión correcta de la primitiva.. 0,25 puntos.

Planteamiento correcto .... 0,25 puntos.

Obtención del valor correcto del parámetro .... 0,50 puntos.

Apartado (b): 1 punto.

Expresión correcta de la ecuación de la recta tangente .... 0,25 puntos.

Cálculo correcto de la pendiente de la tangente .... 0,50 puntos.

Ecuación correcta de la recta tangente .... 0,25 puntos.

Ejercicio 3. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Apartado (a): 1 punto.

Obtención correcta del dominio .... 0,25 puntos

Estudio de la continuidad si $x \neq 0$ .... 0,25 puntos.

Estudio de las discontinuidades... .0,50 puntos.

Apartado (b): 1 punto.

Estudio no existencia de asíntotas horizontales y verticales .... 0,50 puntos

Estudio de la no existencia de asíntota oblicua por la izquierda .... 0,25 puntos.

Estudio de la existencia de asíntota oblicua por la derecha................... 0,25 puntos.

Ejercicio 4. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Apartado (a): 1 punto.

Planteamiento correcto de la probabilidad .... 0,50 puntos.

Cálculo correcto de la probabilidad... 0,50 puntos.

Apartado (b): 1 punto.

Planteamiento correcto de la probabilidad .... 0,50 puntos.

Cálculo correcto de la probabilidad... 0,50 puntos.

Ejercicio 5. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Apartado (a): 1 punto.

Cálculo correcto de $z_{\alpha/2}$ .... 0,25 puntos.

Expresión correcta de la fórmula del intervalo de confianza .... 0,25 puntos.

Determinación correcta del intervalo... 0,50 puntos

Apartado (b): 1 punto.

Cálculo correcto de $z_{\alpha/2}$ .... 0,25 puntos.

Planteamiento correcto .... 0,25 puntos.

Obtención correcta del tamaño mínimo.. 0,50 puntos

NOTA: La resolución de los ejercicios por cualquier otro procedimiento correcto, diferente al propuesto por los coordinadores, ha de valorarse con los criterios convenientemente adaptados.

OPCION B

Ejercicio 1. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Planteamiento correcto de las ecuaciones... 1 punto.

Resolución correcta del sistema .... 1 punto.

Ejercicio 2. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Representación correcta de la región factible....................................... 0,75 puntos.

Obtención correcta de los vértices.. 0,75 puntos.

Encontrar el punto de valor máximo y su valor.................................... 0,50 puntos

Ejercicio 3. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Apartado (a): 1 punto.

Determinación correcta de la derivada .... 0,25 puntos.

Determinación correcta de los intervalos .... 0,75 puntos.

Apartado (b): 1 punto.

Planteamiento correcto .... 0,25 puntos.

Cálculo correcto de la integral indefinida .... 0,50 puntos.

Cálculo correcto del área .... 0,25 puntos.

Ejercicio 4. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Apartado (a): 1 punto.

Planteamiento correcto de la probabilidad .... 0,50 puntos.

Cálculo correcto de la probabilidad.. 0,50 puntos.

Apartado (b): 1 punto.

Planteamiento correcto de la probabilidad .... 0,50 puntos.

Cálculo correcto de la probabilidad.. 0,50 puntos.

Ejercicio 5. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Apartado (a): 1 punto.

Cálculo correcto de la media .... 0,25 puntos.

Cálculo correcto de la desviación.. 0,50 puntos.

Expresión correcta de la distribución de la proporción .... 0,25 puntos.

Apartado (b): 1 punto.

Planteamiento correcto de la probabilidad .... 0,25 puntos.

Tipificación correcta de la variable .... 0,25 puntos.

Determinación correcta de la probabilidad... 0,50 puntos.

NOTA: La resolución de los ejercicios por cualquier otro procedimiento correcto, diferente al propuesto por los coordinadores, ha de valorarse con los criterios convenientemente adaptados.

SOLUCIONES

A.1. *a)* $|A| = 2 \implies A$ es invertible y su inversa es

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1/2 & -1/2 & 3/2 \end{pmatrix}$$

b)

$$A \cdot X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \implies X = A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

A.2. *a)*

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 (6x^2 + ae^x - 2)\,dx = \left[(2x^3 + ae^x - 2x\right]_0^1 = a(e-1)$$

Por tanto, $a(e-1) = e - 1 \Rightarrow a = 1$

b) $f(x) = 6x^2 + e^x - 2$

Ecuación de la recta tangente a la gráfica en $x_0 = 0$: $\quad y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$

$$y_0 = f(0) = -1, \quad f'(x) = 12x + e^x \Rightarrow f'(0) = 1$$

Por tanto, $y = x - 1$.

A.3. *a)* $Dom(f) = \mathbb{R}$ ya que son funciones racionales cuyos denominadores no se anulan o se anulan fuera de los intervalos en los que están definidas. Las funciones racionales que componen $f(x)$ son continuas en los tramos correspondientes. Por tanto para ver la continuidad de la función, basta analizar la situación en $x = 0$:

$$f(0) = 0$$

$$\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{x^2+1}{x+1}\right) = 1, \qquad \lim_{x\to 0^-} \left(\frac{-x^4}{x^2+1}\right) = 0$$

Entonces, no existe el límite en $x = 0$ y la función presenta una discontinuidad de salto finito en este punto.

b)
- Asíntotas verticales: no tiene.
- Asíntotas horizontales: no tiene.

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$$

- Asíntotas oblícuas: $y = mx + n$

$$\lim_{x\to -\infty} \left(\frac{f(x)}{x}\right) = \lim_{x\to -\infty} \left(\frac{-x^4}{x(x^2+1)}\right) = \infty$$

$$\lim_{x\to +\infty} \left(\frac{f(x)}{x}\right) = \lim_{x\to +\infty} \left(\frac{x^2+1}{x(x+1)}\right) = 1 = m$$

$$\lim_{x\to +\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x\to +\infty} \left(\frac{x^2+1}{(x+1)} - x\right) = -1$$

La recta $y = x - 1$ es asíntota oblícua cuando $x \to \infty$. Cuando $x \to -\infty$, no hay asíntota oblicua.

A.4. *a)* Por definición $P(B \mid A) = P(A \cap B)/P(A)$ y $P(\bar{B} \mid A) + P(B \mid A) = 1$, entonces

$$P(A \cap B) = P(B \mid A) \cdot P(A) = \big(1 - P(\bar{B} \mid A)\big) \cdot P(A) = (1 - 0{,}89) \cdot 0{,}55 = 0{,}061.$$

b) La probabilidad pedida es

$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\bar{B}) - P(\bar{A} \cap B) = 1 - P(B) - P(A) \cdot P(\bar{B} \mid A) = 1 - 0{,}1 - (0{,}55 \cdot 0{,}89) = 0{,}411.$$

A.5. *a)* $z_{\alpha/2} = 1{,}96$; $z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1{,}96 \cdot \frac{10}{\sqrt{20}} = 4{,}383$. El intervalo es $(195{,}617; 204{,}383)$

b) $z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < 0,5 \Longrightarrow 1{,}645 \cdot \frac{10}{\sqrt{n}} < 0{,}5 \Longrightarrow n = 1083.$

B.1. Sean x =buñuelos de chocolate, y =buñuelos de nata y z =buñuelos de crema.

$$\left\{\begin{array}{rcl} x + y + z &=& 220 \\ y - 2z &=& 0 \\ 3x - 2y + 2z &=& 0 \end{array}\right. \Longrightarrow$$

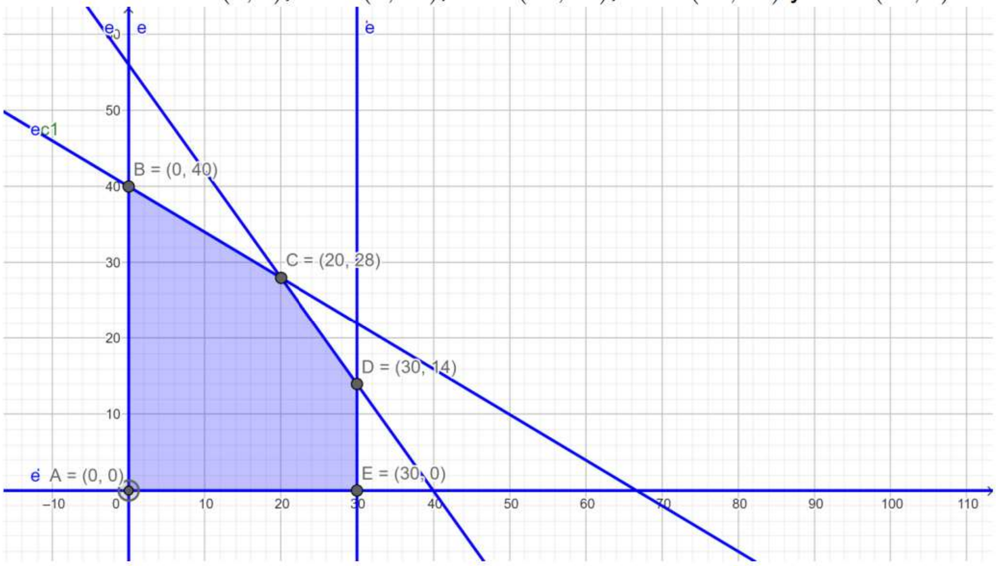
$$(A|B) = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 220 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 3 & -2 & 2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{f_3-3f_1} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 220 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -5 & -1 & -660 \end{array}\right) \xrightarrow{f_3-5f_2} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 220 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -11 & -660 \end{array}\right)$$

Por tanto, la solución es $z = 60$, $y = 120$, $x = 40$.

B.2. Sea x : litros de pintura VERDE1 producida e y : litros de pintura VERDE2 producida. Entonces:

$$S = \{0{,}3x + 0{,}5y \leq 20; 0{,}7x + 0{,}5y \leq 28; x \leq 30; x \geq 0; y \geq 0\},$$

con vértices $A = (0, 0)$, $B = (0, 40)$, $C = (20, 28)$, $D = (30, 14)$ y $E = (30, 0)$.



La función beneficio es $B(x, y) = 1x + 1{,}2y$. Evaluamos en los vértices de la región factible obtenidos:

- $B(0, 0) = 0$
- $B(0, 40) = 48$
- $B(20, 28) = 53{,}6 \rightarrow$ Máximo
- $B(30, 14) = 46{,}8$
- $B(30, 0) = 30$

El máximo beneficio se obtiene fabricando 20 litros de pintura VERDE1 y 28 litros de pintura VERDE2, y se obtiene un beneficio de 56.3 euros.

B.3. *a)* f(x) es continua y derivable $\forall x \in \mathbb{R}$

$$f'(x) = -3x^2 + 4x + 4$$

$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -3x^2 + 4x + 4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in \{\frac{-2}{3}, 2\}$

En $x \in \left(-\infty, \frac{-2}{3}\right)$ $f'(x) < 0$ y $f(x)$ es decreciente.

En $x \in \left(\frac{-2}{3}, 2\right)$ $f'(x) > 0$ y , $f(x)$ es creciente.

En $x \in (2, +\infty)$ $f'(x) < 0$ y $f(x)$ es decreciente.

b) Puntos de corte entre las dos funciones:

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow -x^3 + 2x^2 + 4x = 4x \Leftrightarrow x \in \{0, 2\}$$

En (0,2) la función $f(x)$ no cambia de signo ni tampoco lo hace la función $g(x)$. Ambas funciones son mayores que cero en este intervalo y, además, $f(x) > g(x)\, \forall x \in (0, 2)$. Entonces,

$$\acute{A}rea = \int_0^2 (f(x) - g(x))\, dx = \int_0^2 (-x^3 + 2x^2)\, dx = 4/3\, u^2$$

B.4. Definimos los sucesos M ='financiada por el ministerio', Ob ='enseñanza obligatoria'; U ='enseñanza universitaria' y PNU ='enseñanza postobligatoria no universitaria'.

a) La probabilidad pedida es:

$$\begin{aligned} P(M) &= P(M \mid Ob)P(Ob) + P(M \mid U)P(U) + P(M \mid PNU)P(PNU) = \\ &= 0{,}138 \cdot 0{,}565 + 0{,}861 \cdot 0{,}24 + 0{,}803 \cdot 0{,}195 = 0{,}441. \end{aligned}$$

b) La probabilidad pedida es:

$$P(Ob \mid M) = \frac{P(M \mid Ob)P(Ob)}{P(M)} = \frac{0{,}138 \cdot 0{,}565}{0{,}441} = 0{,}177.$$

B.5. *a*) La variable proporción X sigue aproximadamente una distribución normal de media $0{,}30$ y desviación típica

$$\sqrt{\frac{0{,}30 \cdot 0{,}70}{120}} = 0{,}0418.$$

b) $P(X > 0,35) = P\left(Z > \frac{0{,}35-0{,}30}{0{,}0418}\right) = 1 - P\left(Z \leq 1{,}2\right) = 1 - 0{,}8849 = 0{,}1151.$