EXAMEN PROGRAMACIÓN LINEAL Y ÁLGEBRA

1. Una industria vinícola produce vino y vinagre. El doble de la producción de vino es siempre menor o igual que la producción de vinagre más cuatro unidades. Además, el triple de la producción de vinagre más cuatro veces la producción de vino es siempre menor o igual que 18 unidades. Halla el número de unidades de cada producto que se deben producir para alcanzar un beneficio máximo, sabiendo que cada unidad de vino deja un beneficio de 8 € y cada unidad de vinagre 2 €.

2. Considera el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x - my + z = 1 \\ x + y + z = m + 2 \\ x + y + mz = 4 \end{cases}$$

a) Clasifícalo según los valores del parámetro m.
b) Resuélvelo cuando sea compatible indeterminado.

3. Se consideran las matrices

$$A \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad B \begin{pmatrix} -3 & 4 & -6 \\ -2 & 1 & -2 \\ -11 & 3 & -8 \end{pmatrix}$$

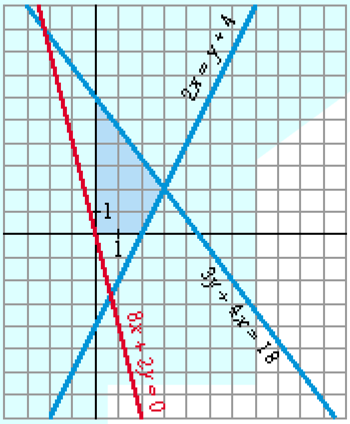
a) Calcula A^{-1} A^{T} , donde T denota la matriz transpuesta
b) Resuelve la ecuación: $\frac{1}{4} A^2 - AX = B$

- Llamamos x a las unidades de vino e y a las de vinagre. Las restricciones son:

$$\left.\begin{array}{l} x \geq 0;\ y \geq 0 \\ 2x \leq y + 4 \\ 3y + 4x \leq 18 \end{array}\right\}$$

- La función que nos da el beneficio es $f(x, y) = 8x + 2y$. Tenemos que maximizar $f(x, y)$, sujeta a las restricciones anteriores.

- Representamos el recinto de restricciones y la recta $8x + 2y = 0 \rightarrow 4x + y = 0$, que nos da la dirección de las rectas $z = 8x + 2y$.



- El máximo se alcanza en el punto de intersección de las rectas:

$$\left.\begin{array}{r} 2x = y + 4 \\ 3y + 4x = 18 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} x = 3 \\ y = 2 \end{array}\right\}$$

Por tanto, hay que producir 3 unidades de vino y 2 de vinagre.

a)
Si m es diferente de 1 y -1 SCD
Si m = 1 SI
Si m = -1 SCI
c) X = 2 - landa Y = 1 z = landa

a)

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ -1/4 & 1/4 & 1/4 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1}A^T = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ -1/4 & 1/4 & 1/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

b)

$$\frac{1}{4}A^2 - AX = B \Longrightarrow X = A^{-1}\left(\frac{1}{4}A^2 - B\right)$$

$$\frac{1}{4}A^2 - B = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 & 4 & -6 \\ -2 & 1 & -2 \\ -11 & 3 & -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 6 \\ 2 & 0 & 2 \\ 14 & -2 & 12 \end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1}\left(\frac{1}{4}A^2 - B\right) = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ -1/4 & 1/4 & 1/4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & -2 & 6 \\ 2 & 0 & 2 \\ 14 & -2 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$