UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID
EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LAS ENSEÑANZAS
UNIVERSITARIAS OFICIALES DE GRADO

Curso **2020-2021**

MATERIA: MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente todas las preguntas, el alumno deberá responder razonadamente a **cinco** preguntas cualesquiera a elegir entre las diez que se proponen.

CALIFICACIÓN: Cada pregunta se valorará sobre 2 puntos.

TIEMPO: 90 minutos.

A. 1. (Calificación máxima: 2 puntos)

Se consideran las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} a & 2 & 6 \\ 2 & a & 4 \\ 2 & a & 6 \end{pmatrix}; \qquad B = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

a) Determine los valores del parámetro real a para los que la matriz A no es invertible.
b) Para $a = 1$, calcule la matriz inversa A^{-1} y obtenga la matriz X tal que $AX = B$.

A. 2. (Calificación máxima: 2 puntos)

Se considera la función real de variable real

$$f(x) = \frac{x^3}{(1-x)^2}$$

a) Calcule las asíntotas de $f(x)$.
b) Determine los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de $f(x)$.

A. 3. (Calificación máxima: 2 puntos)

Sea $f(x) = x^2 + ax$ donde a es un parámetro real.

a) Determine el valor de a para que la función $f(x)$ tenga una primitiva $F(x)$ que verifique $F(0) = 3$ y $F(2) = 9$.
b) Para $a = -2$, calcule el área de la región acotada del plano delimitada por la gráfica de $f(x)$, el eje de abscisas y las rectas $x = 0$, $x = 3$.

A. 4. (Calificación máxima: 2 puntos)

Una urna contiene 9 bolas blancas y 3 negras. Se seleccionan al azar consecutivamente y sin reemplazamiento dos bolas. Calcule la probabilidad de que

a) La segunda bola seleccionada sea negra.
b) Ambas bolas seleccionadas sean negras, dado que la segunda bola seleccionada es negra.

A. 5. (Calificación máxima: 2 puntos)

Una máquina de empaquetar mantequilla la corta en barras. El peso de una barra de mantequilla se puede aproximar por una distribución normal de media μ y desviación típica 4 gramos.

a) Se analiza el peso de 15 barras. La media muestral resulta ser 254 gramos. Determine un intervalo de confianza con un nivel del 95 % para la media poblacional.
b) Para una muestra de 25 barras, se sabe que la media poblacional del peso de una barra de mantequilla es 250 gramos. Calcule la probabilidad de que la media muestral no sea menor que 248 gramos.

B.1. (Calificación máxima: 2 puntos)
a) Represente la región S del plano delimitada por las inecuaciones

$$-2x+y \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 2, \quad x+y \leq 3, \quad x \geq 0$$

y calcule las coordenadas de sus vértices.
b) Determine el máximo y el mínimo de la función $f(x,y) = x + y$ sobre la región S.

B.2. (Calificación máxima: 2 puntos)
Se desea rellenar una piñata para un cumpleaños con juguetes de 1, 2 y 5 euros. Por cada cinco juguetes de 5 euros debe haber un juguete de 2 euros, por cada dos juguetes de 2 euros debe haber tres de 1 euro. Si para rellenar la piñata se compran juguetes por valor de 228 euros, ¿cuántos juguetes de 1, 2 y 5 euros habría que comprar para introducir en la piñata?

B.3. (Calificación máxima: 2 puntos)
Se considera la función real de variable real definida por

$$f(x) = ax^2 + \frac{b}{x} + 2x$$

donde a y b son parámetros reales.

a) Calcule a, b para que la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto $(1,2)$ sea paralela a la recta $y = -4x$.
b) Determine todos los valores de a y b para que $f(x)$ tenga un punto de inflexión en el punto $(1,2)$.

B.4. (Calificación máxima: 2 puntos)
Sean A y B dos sucesos con $P(A) = \frac{2}{5}$, $P(B) = \frac{1}{2}$, $P(A \mid \overline{B}) = \frac{4}{5}$.

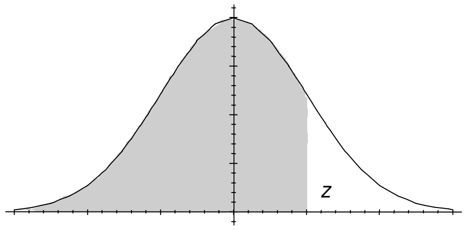
a) Calcule $P(A \cap \overline{B})$.
b) ¿Son A y B incompatibles? Justifique la respuesta.
Nota: $\overline{S}$ denota al suceso complementario del suceso S.

B. 5. (Calificación máxima: 2 puntos)
Para que una determinada marca de chocolate estudie entre sus clientes la demanda de sus cajas de bombones, se desea estimar la proporción de cajas grandes en relación al numero de cajas de bombones vendidas, P.

a) Sabiendo que la proporción poblacional de la demanda es $P = 0,2$, determine el tamaño mínimo necesario de una muestra de ventas de cajas de bombones para garantizar que, con una confianza del 99 %, el margen de error en la estimación no supera el 8 %.
b) Tomada al azar una muestra de 200 cajas de bombones vendidas, se encontró que 25 habían sido cajas grandes. Determine un intervalo de confianza al 95 % para la proporción de cajas grandes en relación a la venta total de cajas de bombones.

ÁREAS BAJO LA DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD NORMAL ESTÁNDAR

Los valores en la tabla representan el área bajo la curva normal hasta un valor positivo de *z*.



z	,00	,01	,02	,03	,04	,05	,06	,07	,08	,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7703	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9954	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II –

CRITERIOS ESPECÍFICOS DE CORRECCIÓN Y CALIFICACIÓN

ATENCIÓN: La calificación debe hacerse en múltiplos de 0,25 puntos. En todos los casos, se valorará el razonamiento correcto.

Ejercicio A1. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Apartado (a): 1 punto.

Expresión correcta de la condición de existencia de inversa.................. 0,25 puntos.
Planteamiento correcto .... 0,50 puntos.
Determinación correcta de los valores del parámetro…………………..0,25 puntos.

Apartado (b): 1 punto.

Cálculo correcto de A^{-1}... 0,50 puntos.
Determinación correcta de la matriz X………………………………..0,50 puntos.

Estándares de aprendizaje evaluables: Realiza operaciones con matrices y aplica las propiedades de estas operaciones adecuadamente de forma manual. Analiza y comprende el enunciado a resolver (datos, relaciones entre los datos, condiciones, conocimientos matemáticos necesarios, etc.).

Ejercicio A2. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Apartado (a): 1 punto.

Determinación correcta de la asíntota vertical…………………………..0,25 puntos.
Exclusión de la existencia de asíntotas horizontales…………………… 0,25puntos.
Cálculo correcto de la asíntota oblicua…………………………………..0,50 puntos

Apartado (b): 1 punto

Cálculo correcto de la derivada...0,50 puntos.
Determinación de los intervalos…………………………………………0,50 puntos.

Estándares de aprendizaje evaluables: Calcula las asíntotas de funciones racionales. Extrae conclusiones a partir de datos relativos a propiedades locales o globales. Aplica los conceptos de límite y derivadas. Usa el lenguaje, la notación y los símbolos matemáticos adecuados al contexto y a la situación.

Ejercicio A3. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Apartado (a): 1 punto.

Cálculo correcto de la primitiva .... 0,25 puntos.
Planteamiento correcto de las condiciones del enunciado.......................0,25 puntos.
Determinación del parámetro y de la constante………………………….0,50 puntos.

Apartado (b): 1 punto

Planteamiento correcto... 0,25 puntos.
Cálculo correcto de la primitiva…………………….……..…………0,50 puntos.
Cálculo correcto del área ……………………………………………0,25 puntos.

Estándares de aprendizaje evaluables: Extrae conclusiones a partir de datos relativos a propiedades locales o globales. Aplica los conceptos de límite y derivadas. Usa el lenguaje, la notación y los símbolos matemáticos adecuados al contexto y a la situación. Aplica la regla de Barrow al cálculo de integrales definidas de funciones elementales inmediatas. .

Ejercicio A4. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Apartado (a): 1 punto.

Planteamiento correcto de la probabilidad .... 0,50 puntos.
Cálculo correcto de la probabilidad.. 0,50 puntos.

Apartado (b): 1 punto.

Planteamiento correcto de la probabilidad .... 0,50 puntos.
Cálculo correcto de la probabilidad.. 0,50 puntos.

Estándares de aprendizaje evaluables: Calcula la probabilidad de sucesos en experimentos simples y compuestos mediante la regla de Laplace, las fórmulas derivadas de la axiomática de Kolmogorov y diferentes técnicas de recuento. Calcula la probabilidad final de un suceso aplicando la fórmula de Bayes.

Ejercicio A5. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Apartado (a): 1 punto.

Cálculo correcto de $z_{\alpha/2}$ .... 0,25 puntos.

Planteamiento correcto .... 0,25 puntos.

Obtención correcta del intervalo .... 0,50 puntos.

Apartado (b): 1 punto.

Expresión correcta de la distribución de la media .... 0,25 puntos.

Tipificación correcta de la variable .... 0,25 puntos.

Obtención correcta de la probabilidad.. 0,50 puntos.

Estándares de aprendizaje evaluables: Calcula probabilidades asociadas a la distribución de la media muestral y de la proporción, aproximándolas por la distribución normal de parámetros adecuados a cada situación, y lo aplica a problemas de situaciones reales. Construye, en contextos reales, un intervalo de confianza para la media poblacional de una distribución normal con desviación típica conocida.

Ejercicio B1. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Apartado (a): 1 punto.

Representación correcta de la región factible....................................... 0,50 puntos.

Obtención correcta de los vértices.. 0,50 puntos.

Apartado (b): 1 punto.

Determinación del punto de valor mínimo (abscisa y ordenada) .... 0,50 puntos.

Encontrar el punto de valor máximo (abscisa y ordenada) .... 0,50 puntos

Estándares de aprendizaje evaluables: Aplica las técnicas gráficas de programación lineal bidimensional para resolver problemas de optimización de funciones lineales que están sujetas a restricciones e interpreta los resultados obtenidos en el contexto del problema.

Ejercicio B2. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Apartado (a): 1 punto.

Planteamiento correcto de las condiciones del enunciado……………… 1 punto.

Apartado (b): 1 punto.

Solución correcta del sistema…………………………….……………1 punto.

Estándares de aprendizaje evaluables: Manipula el sistema de ecuaciones lineales de tres ecuaciones y tres incógnitas y lo resuelve en los casos en que sea posible. Usa el lenguaje, la notación y los símbolos matemáticos adecuados al contexto y a la situación. El sistema de ecuaciones lineales planteado (como máximo de tres ecuaciones y tres incógnitas), lo resuelve en los casos que sea posible, y lo aplica para resolver problemas en contextos reales.

Ejercicio B3. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Apartado (a): 1 punto.

Determinación correcta de la derivada…………………………………..0,25puntos.

Planteamiento de la condición de paralelismo……………..……………0,25 puntos.

Determinación correcta de f(1) a partir del enunciado…………………..0,25 puntos.

Cálculo correcto de los valores de a y de b………………………………0,25 puntos.

Apartado (b): 1 punto.

Cálculo correcto de la segunda derivada…………………………………0,25 puntos.

Planteamiento correcto de la condición de punto de inflexión………..…0,25 puntos.

Expresión correcta de la relación entre a y b.. ...0,50 puntos.

Estándares de aprendizaje evaluables: Extrae conclusiones a partir de datos relativos a propiedades locales o globales. Aplica los conceptos de límite y derivadas. Usa el lenguaje, la notación y los símbolos matemáticos adecuados al contexto y a la situación. Obtiene la expresión algebraica a partir de datos relativos a sus propiedades locales o globales.

Ejercicio B4. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Apartado (a): 1 punto.

Planteamiento correcto .... 0,50 puntos.

Cálculo correcto de la probabilidad... 0,50 puntos.

Apartado (b): 1 punto.

Planteamiento correcto de la condición de incompatibilidad .... 0,25 puntos.

Cálculo correcto de la probabilidad de la intersección........................... …0,50 puntos.

Conclusiones……………………………………………………………0,25 puntos

Estándares de aprendizaje evaluables: Calcula la probabilidad de sucesos en experimentos simples y compuestos mediante la regla de Laplace, las fórmulas derivadas de la axiomática de Kolmogorov y diferentes técnicas de recuento. Calcula la probabilidad final de un suceso aplicando la fórmula de Bayes.

Ejercicio B5. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Apartado (a): 1 punto.

Cálculo correcto de $z_{\alpha/2}$ .... 0,25 puntos.

Expresión correcta del error .... 0,25 puntos.

Determinación correcta del tamaño de la muestra .... 0,50 puntos.

Apartado (b): 1 punto.

Cálculo correcto de $z_{\alpha/2}$ .... 0,25 puntos.

Planteamiento correcto... 0,25 puntos.

Obtención correcta del intervalo .... 0,50 puntos.

Estándares de aprendizaje evaluables: Calcula probabilidades asociadas a la distribución de la media muestral y de la proporción, aproximándolas por la distribución normal de parámetros adecuados a cada situación, y lo aplica a problemas de situaciones reales. Construye, en contextos reales, un intervalo de confianza para la media poblacional de una distribución normal con desviación típica conocida.

NOTA: La resolución de los ejercicios por cualquier otro procedimiento correcto, diferente al propuesto por los coordinadores, ha de valorarse con los criterios convenientemente adaptados

MATEMATICAS ACS
SOLUCIONES
(Documento de trabajo orientativo)

A1 a) $A = \begin{pmatrix} a & 2 & 6 \\ 2 & a & 4 \\ 2 & a & 6 \end{pmatrix}$

$|A| = 2\left(a^2 - 4\right) = 0 => a = 2, -2$

b) para $a = 1$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 2 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 6 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 1 & -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & 1 & -\frac{4}{3} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

$X = \begin{pmatrix} \frac{7}{3} \\ \frac{10}{3} \\ -1 \end{pmatrix}$

A2 a) $lim_{x\to 1^+} f(x) = \infty$, $lim_{x\to 1^-} f(x) = \infty$ Asíntota vertical $x = 1$

$m = lim_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 1$, $n = lim_{x\to\pm\infty} \left(f(x) - mx\right) = 2$, Asíntota oblícua $y = x + 2$

b) $f'(x) = \dfrac{3x^2 - x^3}{(1-x)^3} = 0$ para $x = 0, 3$ Los intervalos de crecimiento son $(-\infty; 0)\,; (0; 1)\,; (3; \infty)$ ya que en esos intervalos $f'(x) > 0$ y el intervalo de decrecimiento es $(1; 3)$ ya que en ese intervalo $f'(x) < 0$.

A3 a) $F(x) = \int f(x)dx = \frac{x^3}{3} + a\frac{x^2}{2} + C$

$F(0) = C = 3$

$F(2) = \frac{8}{3} + a\frac{4}{2} + 3 = 9 => a = \frac{5}{3}$

$F(x) = \frac{x^3}{3} + 5\frac{x^2}{6} + 3$

b) $f(x)$ es una parábola que corta al eje X en x=0 y x=2 y tiene un mínimo en x=1

$$A = \left|\int_0^2 f(x)dx\right| + \left|\int_2^3 f(x)dx\right| = \frac{4}{3} + \frac{4}{3} = \frac{8}{3}$$

A4 a) $P(\text{Segunda bola negra}) = P(\text{dos negras}) + P(\text{Primera Blanca y segunda negra}) = \frac{3}{12}\cdot\frac{2}{11} + \frac{9}{12}\cdot\frac{3}{11} = \frac{1}{4}$

b) $P(\text{Primera Negra}|\text{Segunda negra}) = \dfrac{P(\text{dos negras})}{P(\text{Segunda bola negra})} = \dfrac{\frac{1}{22}}{\frac{1}{4}} = \frac{2}{11}$

A5 a) $z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,96\frac{4}{\sqrt{15}} = 2,024 => IC = (251,98; 256,02)$

b) $P\left(\overline{X} \geq 248\right) = P\left(\dfrac{\overline{X} - 250}{4/\sqrt{25}} \geq \dfrac{-2}{4/\sqrt{25}}\right) = P\left(Z \geq -2,5\right) = 0,9938$

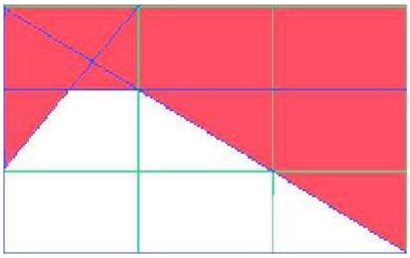


Figura 1:

B1 $a)$ Los vértices de la región son $(0,0),\ (3,0),\ (0,1),(1,2),(\frac{1}{2},2)$

$b)$ El máximo se alcanza en el segmento de extremos $(3,0)$ y $(1,2)$ y vale 3. Y el mínimo se alcanza en el punto $(0,0)$ y vale 0.

B2 Sea $x \equiv$número de juguetes de 1 euro

$y \equiv$número de juguetes de 2 euros

$z \equiv$número de juguetes de 5 euros

Se tiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left\{\begin{array}{l} x+2y+5z=228 \\ -5y+z=0 \\ 2x-3y \quad =0 \end{array}\right.$$

Solución: $x=12, y=8, z=40$

B3 $a)$ $f'(x)=2ax-\frac{b}{x^2}+2$

$\left\{\begin{array}{l} f(1)=2 \\ f'(1)=-4 \end{array}\right. \left\{\begin{array}{l} a+b=0 \\ 2a-b=-6 \end{array}\right. \quad a=-2, b=2$

$b)$ $f''(x)=2a+\frac{2b}{x^3}$

$\left\{\begin{array}{l} f(1)=2 \\ f''(1)=0 \end{array}\right. \left\{\begin{array}{l} a+b=0 \\ 2a+2b=0 \end{array}\right. \quad a=-b$

B4 $a)$ $P(A\cap\overline{B})=P(A\mid\overline{B})P(\overline{B})=\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{2}=\frac{2}{5}$

$b)$ $P(A\cap B)=P(A)-P(A\cap\overline{B})=\frac{2}{5}-\frac{2}{5}=0$

Entonces A y B son incompatibles.

B5 $a)$ $\varepsilon=z_{\alpha/2}\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}}; z_{\alpha/2}=2,575$

$n=\frac{(2'575)^2 0'2\cdot 0'8}{(0'08)^2}=165,77$ El mínimo tamaño muestral es 166

$b)$ $\widehat{p}=\frac{1}{8}, n=200, z_{\alpha/2}=1,96$

$\frac{1}{8}\pm 1,96\sqrt{\dfrac{\frac{1}{8}\cdot\frac{7}{8}}{200}}$

$\frac{1}{8}-1,96\sqrt{\dfrac{\frac{1}{8}\cdot\frac{7}{8}}{200}}=0,079$

$\frac{1}{8}+1,96\sqrt{\dfrac{\frac{1}{8}\cdot\frac{7}{8}}{200}}=0,171$

$IC=(0,079;0,171)$