UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID
EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LAS ENSEÑANZAS
UNIVERSITARIAS OFICIALES DE GRADO

Curso **2021-2022**
MATERIA: MATEMÁTICAS II

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente el examen, responda razonadamente cuatro preguntas cualesquiera a elegir entre las ocho que se proponen. **Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.**

CALIFICACIÓN: La valoración de cada ejercicio se especifica en el enunciado.

TIEMPO: 90 minutos.

A.1. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dado el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependientes del parámetro real m:

$$\begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ mx + (m+1)y - z = m - 1 \\ -x - 2y + (2m-1)z = 1 - m \end{cases}.$$

a) (2 puntos) Discuta el sistema en función de los valores de m.

b) (0.5 puntos) Resuelva el sistema para el valor $m = 1$.

A.2. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Sea la función $f(x) = 1 + \dfrac{1}{x}$.

a) (1 punto) Determine el dominio y los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de la función $f(x)$.

b) (1.5 puntos) Dada la función $g(x) = \dfrac{5-x}{2}$, halle el área de la región acotada por las gráficas de las funciones $f(x)$ y $g(x)$.

A.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Sea la recta $r \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R} \\ z = 0 \end{cases}$ y el punto $P(1,1,0)$.

a) (1 punto) Halle los puntos pertenecientes a la recta r que distan de P una unidad.

b) (1.5 puntos) Halle unas ecuaciones de las rectas que pasan por P, son perpendiculares a r y forman un ángulo $\dfrac{\pi}{3}$ radianes con la normal al plano $x = 0$.

A.4. Calificación máxima: 2.5 puntos.

En una tienda se hace un estudio sobre la venta de dos productos A y B a lo largo de un mes. La probabilidad de que un cliente compre el producto A es de un 62 % y la de que compre el producto B es de un 40 %. Se observa, además, que el 12 % de los clientes compran al mismo tiempo el producto A y el producto B. Se pide:

a) (0.75 puntos) Calcular la probabilidad de que un cliente haya comprado el producto A sabiendo que no ha adquirido el producto B.

b) (0.75 puntos) Calcular la probabilidad de que un cliente no compre ni el producto A ni el producto B.

c) (1 punto) Sabiendo que a lo largo de un mes visitan la tienda 3000 personas, calcular, utilizando la aproximación de la distribución binomial mediante la distribución normal, cuál es la probabilidad de que compren el producto B más de 1250 personas.

B.1. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} c & 8 \\ 1 & b+c \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & a+c & 4 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} a+2 & 1 \\ 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Se pide:

a) (1 punto) Calcular el valor de a para que el sistema de ecuaciones $C \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ sea compatible.

b) (1.5 puntos) Calcular los valores de a, b y c para que la multiplicación de dos de las matrices sea igual a la restante.

B.2. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Sea $f(x)$ una función continua y derivable en todo $\mathbb{R}$ tal que $f(1) = 2$, $f(2) = 1$, $f'(1) = 1$ y $f'(2) = 2$. Se consideran, además, las funciones $g(x) = (f(x))^2$ y $h(x) = (f \circ f)(x)$. Se pide:

a) (0.5 puntos) Calcular $g(2)$ y $g'(2)$.

b) (1 punto) Calcular la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $h(x)$ en el punto $x = 1$.

c) (1 punto) Probar, utilizando el Teorema del Valor Medio, que existe un punto en el intervalo $(1, 2)$ en el que el valor de la derivada de $f(x)$ es -1.

B.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.

a) (0.5 puntos) Calcule el ángulo formado por los vectores $\vec{u} = (0, 0, 1)$ y $\vec{v} = (0, 1, \sqrt{3})$.

b) (1 punto) Sea O el origen de coordenadas, y los puntos $A\,(2, 0, 0)$, $B\,(0, 3, 0)$ y $C\,(0, 2, 2\sqrt{3})$. Calcule el volumen del paralelepípedo determinado por las tres aristas concurrentes $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ y $\overline{OC}$.

c) (1 punto) Calcule una ecuación de la recta perpendicular común a las rectas r y s, siendo r la recta que pasa por O y por C y s la recta de ecuaciones $y - 3 = 0$, $z = 0$.

B.4. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Una *influencer* famosa publica en su Instagram un 20 % de fotografías dedicadas a viajes, un 50 % referentes a temas de moda y el resto sobre maternidad. El 5 % de las publicaciones de viajes reciben menos de 20 000 *Me gusta* y lo mismo ocurre con el 20 % de las de moda y con el 35 % de las que tratan asuntos de maternidad. Elegida una fotografía al azar, se pide:

a) (1.25 puntos) Determinar la probabilidad de que tenga más de 20 000 *Me gusta*.

b) (1.25 puntos) Si tiene menos de 20 000 *Me gusta*, calcular la probabilidad de que el tema tratado en ella haya sido sobre viajes.