UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID
EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LAS ENSEÑANZAS
UNIVERSITARIAS OFICIALES DE GRADO

Curso **2021-2022**
MATERIA: MATEMÁTICAS II

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente el examen, responda razonadamente cuatro preguntas cualesquiera a elegir entre las ocho que se proponen. **Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.**

CALIFICACIÓN: La valoración de cada ejercicio se especifica en el enunciado.

TIEMPO: 90 minutos.

A.1. Calificación máxima: 2.5 puntos.

En una estantería de una biblioteca hay ensayos, novelas y biografías. Tres de cada dieciséis libros de la estantería son ensayos. Las biografías junto con la tercera parte de los ensayos exceden en dos a las novelas. Si retiráramos la mitad de los ensayos y la quinta parte de las novelas quedarían ciento cinco libros. Calcule el número de libros de cada clase que hay en la estantería.

A.2. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Sea la función

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x+1}{x} & x < 0 \\ x^2 - 4x + 3 & x \geq 0 \end{cases}.$$

a) (0.75 puntos) Estudie la continuidad de $f(x)$ en $\mathbb{R}$.

b) (0.25 puntos) ¿Es $f(x)$ derivable en $x = 0$? Justifique la respuesta.

c) (0.75 puntos) Calcule, si existen, las ecuaciones de sus asíntotas horizontales y verticales.

d) (0.75 puntos) Determine para $x \in (0, \infty)$ el punto de la gráfica de $f(x)$ en el que la pendiente de la recta tangente es nula y obtenga la ecuación de la recta tangente en dicho punto. En el punto obtenido, ¿alcanza $f(x)$ algún extremo relativo? En caso afirmativo, clasifíquelo.

A.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Sean el plano $\pi \equiv z = x$ y los puntos $A(0, -1, 0)$ y $B(0, 1, 0)$ pertenecientes al plano π.

a) (1.25 puntos) Si los puntos A y B son vértices contiguos de un cuadrado con vértices $\{A, B, C, D\}$ que se encuentra en el plano π, encuentre los posibles puntos C y D.

b) (1.25 puntos) Si los puntos A y B son vértices opuestos de un cuadrado que se encuentra en el plano π, determine los otros dos vértices del mismo.

A.4. Calificación máxima: 2.5 puntos.

En una comunidad autónoma tres de cada cinco alumnos de segundo de bachillerato están matriculados en la asignatura de Matemáticas II. Se eligen 6 alumnos al azar de entre todos los alumnos de segundo de bachillerato. Se pide:

a) (0.75 puntos) Calcular la probabilidad de que exactamente cuatro de ellos estén matriculados en Matemáticas II.

b) (0.75 puntos) Calcular la probabilidad de que alguno de ellos esté matriculado en Matemáticas II.

c) (1 punto) Si en un instituto hay matriculados en segundo de bachillerato 120 alumnos, calcular, aproximando la distribución binomial mediante una distribución normal, la probabilidad de que más de 60 de estos alumnos estén matriculados en Matemáticas II.

B.1. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Se consideran las matrices reales

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & k \\ k & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) (1 punto) Calcule para qué valores del parámetro k tiene inversa la matriz AB. Calcule la matriz inversa de AB para $k = 1$.

b) (1 punto) Calcule BA y discuta su rango en función del valor del parámetro real k.

c) (0.5 puntos) En el caso $k = 1$, escriba un sistema incompatible de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas cuya matriz de coeficientes sea BA.

B.2. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Sea la función

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \leq 0 \\ x\ln(x) & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}.$$

a) (0.5 puntos) Estudie la continuidad y la derivabilidad de $f(x)$ en $x = 0$.

b) (1 punto) Estudie los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de $f(x)$, así como los máximos y mínimos relativos.

c) (1 punto) Calcule $\displaystyle\int_1^2 f(x)dx$.

B.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Sean las rectas $r \equiv \begin{cases} x + y + 2 = 0 \\ y - 2z + 1 = 0 \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} x = 2 - 2t \\ y = 5 + 2t, \\ z = t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$

a) (1.5 puntos) Estudie la posición relativa de las rectas dadas y calcule la distancia entre ellas.

b) (0.5 puntos) Determine una ecuación del plano π que contiene a las rectas r y s.

c) (0.5 puntos) Sean P y Q los puntos de las rectas r y s, respectivamente, que están contenidos en el plano de ecuación $z = 0$. Calcular una ecuación de la recta que pasa por los puntos P y Q.

B.4. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Una empresa comercializa tres tipos de productos A, B y C. Cuatro de cada siete productos son de tipo A, dos de cada siete productos son de tipo B y el resto lo son de tipo C. A la exportación se destina un 40 % de los productos tipo A, un 60 % de los productos tipo B y un 20 % de los productos tipo C. Elegido un producto al azar, se pide:

a) (1.25 puntos) Calcular la probabilidad de que el producto sea destinado a la exportación.

b) (1.25 puntos) Calcular la probabilidad de que sea del tipo C sabiendo que el producto es destinado a la exportación.