UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID
EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LAS ENSEÑANZAS
UNIVERSITARIAS OFICIALES DE GRADO

Curso **2021-2022**

MATERIA: MATEMÁTICAS II

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente el examen, responda razonadamente cuatro preguntas cualesquiera a elegir entre las ocho que se proponen. **Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.**

CALIFICACIÓN: La valoración de cada ejercicio se especifica en el enunciado.

TIEMPO: 90 minutos.

A.1. Calificación máxima: 2.5 puntos.

En una estantería de una biblioteca hay ensayos, novelas y biografías. Tres de cada dieciséis libros de la estantería son ensayos. Las biografías junto con la tercera parte de los ensayos exceden en dos a las novelas. Si retiráramos la mitad de los ensayos y la quinta parte de las novelas quedarían ciento cinco libros. Calcule el número de libros de cada clase que hay en la estantería.

A.2. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Sea la función

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x+1}{x} & x < 0 \\ x^2 - 4x + 3 & x \geq 0 \end{cases}.$$

a) (0.75 puntos) Estudie la continuidad de $f(x)$ en $\mathbb{R}$.

b) (0.25 puntos) ¿Es $f(x)$ derivable en $x = 0$? Justifique la respuesta.

c) (0.75 puntos) Calcule, si existen, las ecuaciones de sus asíntotas horizontales y verticales.

d) (0.75 puntos) Determine para $x \in (0, \infty)$ el punto de la gráfica de $f(x)$ en el que la pendiente de la recta tangente es nula y obtenga la ecuación de la recta tangente en dicho punto. En el punto obtenido, ¿alcanza $f(x)$ algún extremo relativo? En caso afirmativo, clasifíquelo.

A.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Sean el plano $\pi \equiv z = x$ y los puntos $A(0, -1, 0)$ y $B(0, 1, 0)$ pertenecientes al plano π.

a) (1.25 puntos) Si los puntos A y B son vértices contiguos de un cuadrado con vértices $\{A, B, C, D\}$ que se encuentra en el plano π, encuentre los posibles puntos C y D.

b) (1.25 puntos) Si los puntos A y B son vértices opuestos de un cuadrado que se encuentra en el plano π, determine los otros dos vértices del mismo.

A.4. Calificación máxima: 2.5 puntos.

En una comunidad autónoma tres de cada cinco alumnos de segundo de bachillerato están matriculados en la asignatura de Matemáticas II. Se eligen 6 alumnos al azar de entre todos los alumnos de segundo de bachillerato. Se pide:

a) (0.75 puntos) Calcular la probabilidad de que exactamente cuatro de ellos estén matriculados en Matemáticas II.

b) (0.75 puntos) Calcular la probabilidad de que alguno de ellos esté matriculado en Matemáticas II.

c) (1 punto) Si en un instituto hay matriculados en segundo de bachillerato 120 alumnos, calcular, aproximando la distribución binomial mediante una distribución normal, la probabilidad de que más de 60 de estos alumnos estén matriculados en Matemáticas II.

B.1. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Se consideran las matrices reales

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & k \\ k & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) (1 punto) Calcule para qué valores del parámetro k tiene inversa la matriz AB. Calcule la matriz inversa de AB para $k = 1$.

b) (1 punto) Calcule BA y discuta su rango en función del valor del parámetro real k.

c) (0.5 puntos) En el caso $k = 1$, escriba un sistema incompatible de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas cuya matriz de coeficientes sea BA.

B.2. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Sea la función

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \leq 0 \\ x\ln(x) & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}.$$

a) (0.5 puntos) Estudie la continuidad y la derivabilidad de $f(x)$ en $x = 0$.

b) (1 punto) Estudie los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de $f(x)$, así como los máximos y mínimos relativos.

c) (1 punto) Calcule $\displaystyle\int_1^2 f(x)dx$.

B.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Sean las rectas $r \equiv \begin{cases} x + y + 2 = 0 \\ y - 2z + 1 = 0 \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} x = 2 - 2t \\ y = 5 + 2t, \\ z = t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$

a) (1.5 puntos) Estudie la posición relativa de las rectas dadas y calcule la distancia entre ellas.

b) (0.5 puntos) Determine una ecuación del plano π que contiene a las rectas r y s.

c) (0.5 puntos) Sean P y Q los puntos de las rectas r y s, respectivamente, que están contenidos en el plano de ecuación $z = 0$. Calcular una ecuación de la recta que pasa por los puntos P y Q.

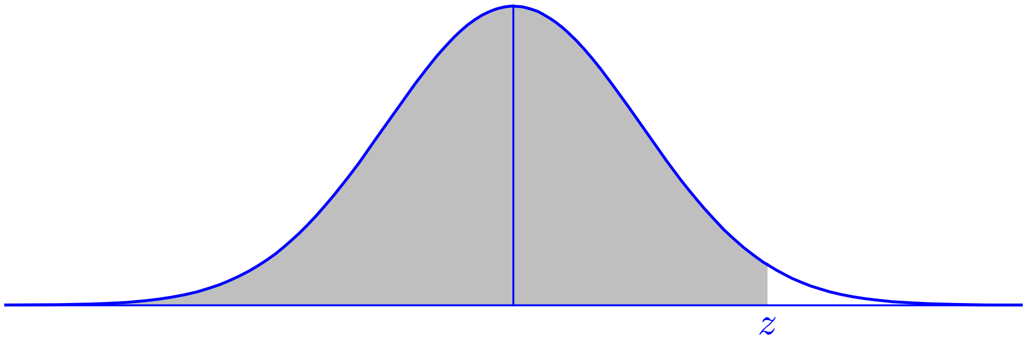
B.4. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Una empresa comercializa tres tipos de productos A, B y C. Cuatro de cada siete productos son de tipo A, dos de cada siete productos son de tipo B y el resto lo son de tipo C. A la exportación se destina un 40 % de los productos tipo A, un 60 % de los productos tipo B y un 20 % de los productos tipo C. Elegido un producto al azar, se pide:

a) (1.25 puntos) Calcular la probabilidad de que el producto sea destinado a la exportación.

b) (1.25 puntos) Calcular la probabilidad de que sea del tipo C sabiendo que el producto es destinado a la exportación.

Distribución Normal



Ejemplo: si Z tiene distribución $\mathrm{N}(0,1)$, $P(Z < 0{,}45) = 0{,}6736$.

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990

MATEMÁTICAS II

CRITERIOS ESPECÍFICOS DE CORRECCIÓN Y ESTÁNDARES EVALUADOS EN CADA PREGUNTA

Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.
En cada ejercicio, aunque el procedimiento seguido sea diferente al propuesto en el documento de soluciones, cualquier argumento válido que conduzca a la solución será valorado con la puntuación asignada.
Los estándares de aprendizaje del bloque 1 se evaluarán transversalmente en todos los ejercicios, penalizando en la calificación de cada respuesta la falta de justificación razonada o de precisión y valorando las estrategias, razonamientos y toma adecuada de decisiones.

A. 1.

Correcto planteamiento del problema: 1.5 puntos (Se darán 0.5 puntos por cada ecuación bien planteada).
Resolución correcta del sistema planteado: 0.5 puntos.
Interpretación correcta de la solución: 0.5 puntos.
En caso de resolución correcta de un sistema con alguna ecuación mal planteada, se valorará con hasta 0.5 puntos.

Estándares de aprendizaje evaluados: Utiliza el lenguaje matricial para representar datos facilitados mediante tablas o grafos y para representar sistemas de ecuaciones lineales. Formula algebraicamente las restricciones indicadas en una situación de la vida real, estudia y clasifica el sistema de ecuaciones lineales planteado, lo resuelve en los casos que sea posible, y lo aplica para resolver problemas.

A. 2.

a) Resolución: 0.75 puntos (estudio de la continuidad en $\mathbb{R}-\{0\}$: 0.25 puntos; continuidad en $x=0$: 0.5 puntos).
b) Resolución: 0.25 puntos.
c) Resolución: 0.75 puntos (asíntotas horizontales: 0.5 puntos; asíntota vertical: 0.25 puntos).
d) Resolución: 0.75 puntos (obtención del punto pedido: 0.25 puntos; ecuación de la recta tangente: 0.25 puntos; clasificación del extremo local: 0.25 puntos).

Estándares de aprendizaje evaluados: Conoce las propiedades de las funciones continuas, y representa la función en un entorno de los puntos de discontinuidad. Aplica los conceptos de límite y de derivada, así como los teoremas relacionados, a la resolución de problemas.

A. 3.

a) Planteamiento: 0.75 puntos. Resolución: 0.5 puntos.
b) Planteamiento: 0.75 puntos. Resolución: 0.5 puntos.

Estándares de aprendizaje evaluados: Obtiene las ecuaciones de rectas y planos en diferentes situaciones. Maneja el producto escalar y vectorial de dos vectores, significado geométrico, expresión analítica y propiedades. Determina ángulos, distancias, áreas y volúmenes utilizando los productos escalar, vectorial y mixto, aplicándolos en cada caso a la resolución de problemas geométricos.

A. 4.

a) Planteamiento: 0.5 puntos. Resolución: 0.25 puntos.
b) Planteamiento: 0.5 puntos. Resolución: 0.25 puntos.
c) Planteamiento correcto de la distribución normal: 0.5 puntos. Cálculo de la probabilidad: 0.5 puntos.

Estándares de aprendizaje evaluados: Calcula probabilidades asociadas a una distribución binomial a partir de su función de probabilidad, de la tabla de la distribución o mediante calculadora. Calcula probabilidades de sucesos asociados a fenómenos que pueden modelizarse mediante la distribución binomial a partir de su aproximación por la normal valorando si se dan las condiciones necesarias para que sea válida. Utiliza un vocabulario adecuado para describir situaciones relacionadas con el azar.

MATEMÁTICAS II

CRITERIOS ESPECÍFICOS DE CORRECCIÓN Y ESTÁNDARES EVALUADOS EN CADA PREGUNTA

Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.
En cada ejercicio, aunque el procedimiento seguido sea diferente al propuesto en el documento de soluciones, cualquier argumento válido que conduzca a la solución será valorado con la puntuación asignada.
Los estándares de aprendizaje del bloque 1 se evaluarán transversalmente en todos los ejercicios, penalizando en la calificación de cada respuesta la falta de justificación razonada o de precisión y valorando las estrategias, razonamientos y toma adecuada de decisiones.

B. 1.

a) Cálculo de AB: 0.25 puntos. Discusión de la existencia de inversa: 0.5 puntos. Cálculo de la inversa de AB cuando $k = 1$: 0.25 puntos.
b) Cálculo de BA: 0.25 puntos. Discusión del rango: 0.75 puntos (planteamiento: 0.5 puntos; resolución: 0.25 puntos).
c) Planteamiento: 0.25 puntos. Resolución: 0.25 puntos.

Estándares de aprendizaje evaluados: Utiliza el lenguaje matricial para representar datos facilitados mediante tablas o grafos y para representar sistemas de ecuaciones lineales. Realiza operaciones con matrices y aplica las propiedades de estas operaciones adecuadamente. Determina el rango de una matriz, hasta orden 4, aplicando el método de Gauss o determinantes. Determina las condiciones para que una matriz tenga inversa y la calcula empleando el método más adecuado.

B. 2.

a) Continuidad: 0.25 puntos. Derivabilidad: 0.25 puntos.
b) Intervalos de monotonía: 0.5 puntos. Cálculo de los extremos: 0.5 puntos (por cada extremo: 0.25 puntos).
c) Cálculo correcto de la primitiva: 0.75 puntos. Regla de Barrow: 0.25 puntos.

Estándares de aprendizaje evaluados: Conoce las propiedades de las funciones continuas, y representa la función en un entorno de los puntos de discontinuidad. Aplica los conceptos de límite y de derivada, así como los teoremas relacionados, a la resolución de problemas. Aplica la regla de L'Hôpital para resolver indeterminaciones en el cálculo de límites. Aplica los métodos básicos para el cálculo de primitivas de funciones.

B. 3.

a) Posición relativa: 0.75 puntos (planteamiento: 0.25 puntos; solución: 0.5 puntos). Distancia entre las rectas: 0.75 puntos (planteamiento: 0.25 puntos; solución: 0.5 puntos).
b) Planteamiento: 0.25 puntos. Resolución: 0.25 puntos.
c) Planteamiento: 0.25 puntos. Resolución: 0.25 puntos.

Estándares de aprendizaje evaluados: Expresa la ecuación de la recta de sus distintas formas, pasando de una a otra correctamente, identificando en cada caso sus elementos característicos, y resolviendo los problemas afines entre rectas. Analiza la posición relativa de planos y rectas en el espacio, aplicando métodos matriciales y algebraicos. Obtiene las ecuaciones de rectas y planos en diferentes situaciones. Maneja el producto escalar y vectorial de dos vectores, significado geométrico, expresión analítica y propiedades. Determina ángulos, distancias, áreas y volúmenes utilizando los productos escalar, vectorial y mixto, aplicándolos en cada caso a la resolución de problemas geométricos.

B. 4.

a) Cálculo de la probabilidad: 1.25 puntos (planteamiento: 0.5 puntos; resolución: 0.75 puntos).
b) Planteamiento: 0.5 puntos. Resolución: 0.75 puntos.

Estándares de aprendizaje evaluados: Calcula la probabilidad de sucesos en experimentos simples y compuestos mediante la regla de Laplace y las fórmulas derivadas de la axiomática de Kolmogorov. Calcula la probabilidad final de un suceso aplicando la fórmula de Bayes. Utiliza un vocabulario adecuado para describir situaciones relacionadas con el azar.

MATEMÁTICAS II—SOLUCIONES

Documento de trabajo orientativo

A.1.

Sean x: número de ensayos, y: número de novelas y z: número de biografías.
Estas variables deben satisfacer el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\left\{\begin{array}{lcl} \frac{3}{16}(x+y+z) & = & x \\ z+\frac{x}{3} & = & y+2 \\ \frac{x}{2}+\frac{4y}{5}+z & = & 105 \end{array}\right. .$$

En la estantería hay 24 ensayos, 55 novelas y 49 biografías.

A.2.

a) $f(x)$ es continua en $(-\infty,0)\cup(0,\infty)$ (propiedades de las funciones continuas).
$\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{2x+1}{x}=-\infty$ Por tanto, $\nexists \lim\limits_{x\to 0} f(x)$ y la función no es continua en $x=0$.
b) $f(x)$ no es derivable en $x=0$ por no ser continua en este punto.
c) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2-4x+3=+\infty$; no tiene asíntota horizontal cuando $x\to+\infty$.
$\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2x+1}{x}=2$; la recta $y=2$ es una asíntota horizontal cuando $x\to-\infty$.
$\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{2x+1}{x}=-\infty$; la recta $x=0$ es una asíntota vertical.
d) $f'(x)=2x-4=0 \Rightarrow x=2$. En el punto $(2,f(2))=(2,-1)$ la recta tangente es horizontal. Su ecuación es $y+1=0$.
$f'(x)<0$ en $(0,2)$ y $f'(x)>0$ en $(2,+\infty)$; entonces, en $(2,-1)$ la función presenta un mínimo relativo.

A.3.

a) Como el cuadrado está sobre el plano π y los puntos A y B están sobre el eje y, los puntos C y D tienen que tener la siguiente forma $(a,1,a)$ y $(a,-1,a)$ respectivamente. Además, como $d(A,D)=d(B,C)=2$, entonces $\sqrt{a^2+a^2}=\sqrt{2a^2}=2\Rightarrow a=\pm\sqrt{2}$. Por lo que $D(\sqrt{2},-1,\sqrt{2})$ y $C(\sqrt{2},1,\sqrt{2})$ o $D(-\sqrt{2},-1,-\sqrt{2})$ y $C(-\sqrt{2},1,-\sqrt{2})$.
b) Denotemos por C y D los vértices que se piden. Los puntos C y D están contenidos en la recta r_1, que pasa por el punto $O(0,0,0)$, el punto medio entre A y B y es perpendicular a la recta r que pasa por A y B. Sean $\vec{v}=(0,1,0)$ y $\vec{v_1}=(a,b,c)$ los vectores directores de r y r_1, respectivamente. Como todos los puntos pertenecen a π, $a=c$; como $\vec{v}$ y $\vec{v_1}$ tienen que ser perpendiculares, $\vec{v}\cdot\vec{v_1}=0\Rightarrow b=0\Rightarrow \vec{v_1}=(a,0,a)$, tomando $\vec{v_1}=(1,0,1)$ tenemos $r_1\equiv\left\{\begin{array}{l} x=\lambda \\ y=0,\ \lambda\in\mathbb{R}. \\ z=\lambda \end{array}\right.$ Puesto que la distancia entre O y A tiene que ser la misma que entre O y C (igual que entre O y D) que, además, es igual a 1, se tiene que $|(\lambda,0,\lambda)-(0,0,0)|=\sqrt{2\lambda^2}=|\lambda|\sqrt{2}=1\Rightarrow\lambda=\frac{\sqrt{2}}{2}$ o $\lambda=-\frac{\sqrt{2}}{2}$, siendo los vértices $D\left(\frac{\sqrt{2}}{2},0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ y $C\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},0,-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

A.4.

a) Tenemos $p=0.6$, $q=0.4$ y $n=6\Rightarrow X\sim B(6;0.6)$.
$P(X=4)=0.31104$.
b) $P(X>0)=1-P(X=0)=1-0.004096=0.995904$.
c) Tenemos $p=0.6$, $q=0.4$ y $n=120\Rightarrow X\sim B(120;0.6)$.
Aproximación por la Normal $N(72;5.37)$.
$P(X>60)=P(X'\geqslant 60.5)=P(Z\geqslant -2.14)=0.9838$.

SOLUCIONES

Documento de trabajo orientativo

B.1.

a) $AB = \begin{pmatrix} k & 2 \\ k & k-1 \end{pmatrix}$.

Como el $|AB| = k^2 - 3k$, la matriz tiene inversa si $k \neq 0, 3$. Para $k = 1$ tenemos $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

b) $BA = \begin{pmatrix} k+1 & 0 & k-1 \\ 1-k & -2 & k+1 \\ 1 & -1 & k \end{pmatrix}$.

La primera fila más la segunda es igual a la tercera, con lo que el rango es ≤ 2. Además las dos primeras son independientes, por lo que el rango siempre es dos.

c) Para $k = 1$, tenemos que

$$BA = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Basta tomar $BA \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ (cualquier $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ con $2c \neq a + b$ vale).

B.2.

a) $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} x \ln(x) = \lim_{x \to 0^+} \dfrac{\ln(x)}{1/x} = \lim_{x \to 0^+} \dfrac{1/x}{-1/x^2} = 0$, donde se ha aplicado la regla de L'Hôpital. Por otro lado, $\lim_{x \to 0^-} x = 0$. Por tanto $f(x)$ es continua en $x = 0$ ya que $\lim_{x \to 0} f(x) = 0 = f(0)$.

Como $f'(x) = \ln(x) + 1$ si $x > 0$, $\lim_{x \to 0^+} f'(x) = -\infty$, lo que implica que $f(x)$ no es derivable en $x = 0$.

b) $f'(x) = 1 > 0$ en el intervalo $(-\infty, 0)$. En dicho intervalo, la función es creciente.

$f'(x) = \ln(x) + 1$ en $(0, +\infty)$. Como además $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = e^{-1}$, $f'(x) < 0$ en el intervalo $(0, e^{-1})$ y por tanto en este intervalo $f(x)$ es decreciente y $f'(x) > 0$ en el intervalo $(e^{-1}, +\infty)$ y por tanto en este intervalo $f(x)$ es creciente. De ello se deduce que $f(x)$ alcanza un mínimo relativo en $x = e^{-1}$ y un máximo relativo en $x = 0$.

c) Integrando por partes nos queda que $\displaystyle\int_1^2 f(x)dx = \left(\frac{x^2}{2} \ln(x) - \frac{x^2}{4} \right) \Bigg|_1^2 = 2 \ln 2 - \frac{3}{4}$.

B.3.

a) Las rectas r y s son paralelas. La distancia entre las rectas r y s se puede calcular como la distancia de un punto cualquiera de r a la recta s.

Sean $A(-1, -1, 0) \in r$, $B(2, 5, 0) \in s$, el vector $|\overrightarrow{AB}| = (3, 6, 0)$ y el vector director de la recta s, $\vec{v} = (-2, 2, 1)$.

La distancia de A a s viene dada por $d(A, s) = \dfrac{|\overrightarrow{AB} \times \vec{v}|}{|\vec{v}|} = \dfrac{\sqrt{369}}{3} = \sqrt{41}$ u.

b) El plano π viene determinado por un punto de la recta r, y los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\vec{v}$. Una ecuación del mismo es $2x - y + 6z + 1 = 0$.

c) Los puntos P y Q son los puntos de las rectas r y s cuya coordenada z es 0; estos son, $P(-1, -1, 0) \in r$, $Q(2, 5, 0) \in s$. Unas ecuaciones paramétricas de la recta pedida son: $(x, y, z) = (2 + 3t, 5 + 6t, 0),\ t \in \mathbb{R}$.

B.4.

a) Denotemos por E al suceso "el producto es destinado a la exportación".

Tenemos que $P(A) = \dfrac{4}{7}$, $P(B) = \dfrac{2}{7}$ y $P(C) = \dfrac{1}{7}$. Por lo tanto:

$$P(E) = \frac{4}{7} \cdot 0.4 + \frac{2}{7} \cdot 0.6 + \frac{1}{7} \cdot 0.2 = \frac{3}{7}.$$

b) $P(C|E) = \dfrac{P(C \cap E)}{P(E)} = \dfrac{1}{15}$.