UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID
EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LAS ENSEÑANZAS
UNIVERSITARIAS OFICIALES DE GRADO
Curso **2020-2021**
MATERIA: MATEMÁTICAS II

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente el examen, responda razonadamente **cuatro** preguntas cualesquiera a elegir entre las ocho que se proponen.

TIEMPO Y CALIFICACIÓN: 90 minutos. Cada pregunta se calificará sobre 2.5 puntos.

A.1. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Tres amigas, Sara, Cristina y Jimena, tienen un total de 15000 seguidores en una red social. Si Jimena perdiera el 25% de sus seguidores todavía tendría el triple de seguidores que Sara. Además, la mitad de los seguidores de Sara más la quinta parte de los de Cristina suponen la cuarta parte de los seguidores de Jimena. Calcule cuántos seguidores tiene cada una de las tres amigas.

A.2. Calificación máxima: 2.5 puntos.

a) (1.25 puntos) Calcule, en caso de existir, el valor de los siguientes límites:

a.1) (0.5 puntos) $\lim_{x\to 0} \dfrac{x^2(1-2x)}{x-2x^2-\operatorname{sen} x}$ a.2) (0.75 puntos) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{1}{x}\left(\dfrac{3}{x}-\dfrac{2}{\operatorname{sen}\frac{1}{x}}\right)$

(**Indicación**: use el cambio de variable $t = 1/x$ donde sea necesario).

b) (1.25 puntos) Calcule las siguientes integrales:

b.1) (0.5 puntos) $\displaystyle\int \frac{x}{x^2-1}\,dx$ b.2) (0.75 puntos) $\displaystyle\int_0^1 x^2 e^{-x}\,dx$

A.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dado el punto $A(1,0,-1)$, la recta $r \equiv x-1 = y+1 = \dfrac{z-2}{2}$ y el plano $\pi \equiv x+y-z=6$, se pide:

a) (0.75 puntos) Hallar el ángulo que forman el plano π y el plano perpendicular a la recta r que pasa por el punto A.

b) (0.75 puntos) Determinar la distancia entre la recta r y el plano π.

c) (1 punto) Calcular una ecuación de la recta que pasa por A, forma un ángulo recto con la recta r y no corta al plano π.

A.4. Calificación máxima: 2.5 puntos.

En una urna hay dos bolas blancas y cuatro bolas negras. Se extrae una bola al azar. Si la bola extraída es blanca, se devuelve a la urna y se añade otra bola blanca; si es negra, no se devuelve a la urna. A continuación, se vuelve a extraer una bola al azar de la urna.

a) (1 punto) ¿Cuál es la probabilidad de que las dos bolas extraídas sean de distinto color?

b) (1.5 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que la primera bola extraída fuera negra, sabiendo que la segunda ha sido blanca?

B.1. Calificación máxima: 2.5 puntos.

a) (0.75 puntos) Encuentre un único sistema de dos ecuaciones lineales en las variables x e y, que tenga como soluciones $\{x = 1, y = 2\}$ y $\{x = 0, y = 0\}$.

b) (1 punto) Encuentre un sistema de dos ecuaciones lineales en las variables x, y y z cuyas soluciones sean, en función del parámetro $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x & = & \lambda \\ y & = & \lambda - 2 \\ z & = & \lambda - 1 \end{array} \right.$$

c) (0.75 puntos) Encuentre un sistema de tres ecuaciones lineales con dos incógnitas, x e y, que solo tenga como solución a $x = 1$ e $y = 2$.

B.2. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Sea la función

$$f(x) = x^3 - |x| + 2.$$

a) (0.75 puntos) Estudie la continuidad y la derivabilidad de f en $x = 0$.

b) (1 punto) Determine los extremos relativos de $f(x)$ en la recta real.

c) (0.75 puntos) Calcule el área de la región delimitada por la gráfica de f, el eje de abcisas $y = 0$, y las rectas $x = -1$ y $x = 1$.

B.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dadas las rectas

$$r \equiv \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z+4}{-3}, \qquad s \equiv \left\{ \begin{array}{l} x + z = 2 \\ -2x + y - 2z = 1 \end{array} \right.$$

a) (1.5 puntos) Escriba una ecuación de la recta perpendicular común a r y a s.

b) (1 punto) Calcule la distancia entre r y s.

B.4. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Según las estadísticas meteorológicas, en una ciudad nórdica llueve un promedio del 45 % de los días. Un climatólogo analiza los registros pluviométricos de 100 días elegidos al azar entre los de los últimos 50 años.

a) (1 punto) Exprese cómo calcular con exactitud la probabilidad de que en 40 de ellos haya llovido.

b) (1.5 puntos) Calcule dicha probabilidad aproximándola mediante una normal.