	UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LAS ENSEÑANZAS UNIVERSITARIAS OFICIALES DE GRADO Curso **2022-2023** **MATERIA**: MATEMÁTICAS II	**Modelo orientativo**

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente el examen, responda razonadamente cuatro preguntas cualesquiera a elegir entre las ocho que se proponen. **Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.**

CALIFICACIÓN: La valoración de cada ejercicio se especifica en el enunciado.

TIEMPO: 90 minutos.

A.1. Calificación máxima: 2.5 puntos.

En la liga de fútbol profesional de Libertonia compiten veinte equipos. Cada equipo debe tener exactamente veinticinco jugadores de los que tres, y no más, han de ser porteros. Se sabe que la tercera parte del número de defensas coincide con la diferencia entre el número de centrocampistas y el número de delanteros. Por otro lado, la suma de la mitad del número de centrocampistas y el doble del número de delanteros excede en 25 unidades al número de defensas. Calcule el número de defensas, el número de centrocampistas y el número de delanteros que juegan en la liga.

A.2. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Para la función $f(x) = \begin{cases} \dfrac{e(x-1)}{e^x - e} & \text{si} \quad x < 1 \\ \dfrac{1}{4x-3} & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$, se pide:

a) (1 punto) Estudiar su continuidad en $\mathbb{R}$ y determinar, en el caso de que existan, las ecuaciones de sus asíntotas.

b) (0.5 puntos) Para la función $g(x) = (e^x - e)f(x)$, calcular el valor de $g'(0)$.

c) (1 punto) Calcular $\displaystyle\int_1^5 \sqrt{f(x)}\, dx$.

A.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Un depósito en forma de paralelepípedo, de base cuadrada $ABCD$, apoya completamente su base sobre una rampa en un local, quedando una arista superior pegada al techo. Se considera un sistema de ejes, con los semiejes positivos en un rincón del local. La arista inferior paralela a la que se apoya en el techo y no en su misma cara, tiene vértices de coordenadas $A(1,1,1)$ y $B(1,3,1)$. La ecuación del plano que contiene a la rampa es $4x - 3z = 1$ y el vértice sobre el punto A es $A'(1,1,6)$. Se pide:

a) (0.5 puntos) Calcular una ecuación del plano que contiene a las aristas AB y AA'.

b) (1 punto) Calcular los otros dos vértices, C y D, de la base.

c) (1 punto) Calcular el volumen del depósito.

A.4. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Una empresa complementa el sueldo de sus empleados según la consecución de ciertos objetivos valorados en función de una puntuación que sigue una distribución normal $N(100; 35)$. Se pide:

a) (0.75 puntos) Calcular el porcentaje de empleados con una puntuación comprendida entre 100 y 140.

b) (0.75 puntos) Hallar la probabilidad de que un trabajador obtenga una puntuación inferior a 95 puntos.

c) (1 punto) Determinar la puntuación mínima necesaria para cobrar los objetivos si el 75.17 % de la plantilla ha recibido dicho incentivo.

B.1. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dadas las matrices reales: $A = \begin{pmatrix} m & -1 & 1 \\ -2 & 0 & m \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2m & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, se pide:

a) (0.75 puntos) Calcular, si existe, el valor de m para el cual se verifica que $A^t B = C$.

b) (1 punto) Calcular, si existen, los valores de m para los que existe la inversa de AC y calcular para $m = 0$ la inversa de AC.

c) (0.75 puntos) Calcular, si existe, el valor de m para el cual se cumple que $B^2 = B - I$, siendo I la matriz identidad de orden 2.

B.2. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Un ayuntamiento ha dividido en parcelas parte del terreno municipal no urbanizable y lo ha cedido a los vecinos para su cultivo. Uno de los vecinos ha decidido que en su parcela asignada utilizará como huerto una zona rectangular de 72 metros cuadrados, dejando el resto para plantar frutales e instalar una caseta donde guardar las herramientas necesarias. La zona de huerto estará dividida en dos partes: la parte dedicada al cultivo de hortalizas será un rectángulo interior separado de los lados que delimitan el huerto. La separación será de medio metro entre cada uno de los lados de mayor longitud y un metro entre cada uno de los lados de menor longitud. La franja que delimita la zona de hortalizas la dedicará al cultivo de flores y plantas aromáticas.

a) (2 puntos) Calcule las dimensiones del huerto para que el área de la zona para el cultivo de hortalizas sea máxima.

b) (0.5 puntos) Calcule el área de la zona de cultivo de hortalizas.

B.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Se consideran las siguientes rectas:

- r, la recta que pasa por el punto $P(1, 1, 2)$ y tiene como vector director $\vec{u} = (0, 1, 2)$;
- s, la recta de ecuaciones $s \equiv \begin{cases} x + y - 4 = 0 \\ x - 2z + 2 = 0 \end{cases}$;
- t, la recta paralela a s que contiene al punto P.

a) (0.75 puntos) Estudie la posición relativa de r y s.

b) (0.75 puntos) Calcule el ángulo que forman las rectas r y t.

c) (1 punto) Calcule la proyección ortogonal del punto P sobre la recta s.

B.4. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Sabiendo que $P(A \cup B) = \frac{4}{5}$, $P(\overline{A}) = \frac{9}{20}$ y $P(\overline{B}) = \frac{7}{20}$, se pide:

a) (0.75 puntos) Calcular razonadamente $P(\overline{A} \cap \overline{B})$.

b) (0.75 puntos) Calcular razonadamente $P(\overline{A} \cup \overline{B})$.

c) (0.5 puntos) Calcular razonadamente $P(A - B)$.

d) (0.5 puntos) Determinar si A y B son sucesos independientes.

NOTA: $\overline{A}$ y $A - B$ denotan, respectivamente, el suceso contrario de A y el suceso diferencia de A y B.

MATEMÁTICAS II

CRITERIOS ESPECÍFICOS DE CORRECCIÓN Y ESTÁNDARES EVALUADOS EN CADA PREGUNTA

Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.
En cada ejercicio, aunque el procedimiento seguido sea diferente al propuesto en el documento de soluciones, cualquier argumento válido que conduzca a la solución será valorado con la puntuación asignada.
Los estándares de aprendizaje del bloque 1 se evaluarán transversalmente en todos los ejercicios, penalizando en la calificación de cada respuesta la falta de justificación razonada o de precisión y valorando las estrategias, razonamientos y toma adecuada de decisiones.

A. 1.

Correcto planteamiento del problema: 1.5 puntos. (Se darán 0.5 puntos por cada ecuación bien planteada).
Resolución correcta del sistema planteado: 0.5 puntos.
Cálculo correcto del número de defensas, centrocampistas y delanteros: 0.5 puntos.
En caso de resolución correcta de un sistema con alguna ecuación mal planteada, se valorará con hasta 0.5 puntos

Estándares de aprendizaje evaluados: Utiliza el lenguaje matricial para representar datos facilitados mediante tablas o grafos y para representar sistemas de ecuaciones lineales. Formula algebraicamente las restricciones indicadas en una situación de la vida real, estudia y clasifica el sistema de ecuaciones planteado, lo resuelve en los casos que sea posible, y lo aplica para resolver problemas.

A. 2.

a) Estudio continuidad: 0.5 puntos (0.25 puntos para $x \neq 1$ y 0.25 puntos para el resto). Asíntota horizontal: 0.25 puntos. Asíntota oblicua: 0.25 puntos.
b) Cálculo de la derivada: 0.5 puntos (planteamiento: 0.25 puntos; resolución: 0.25 puntos).
c) Cálculo de la primitiva: 0.75 puntos. Regla de Barrow: 0.25 puntos.

Estándares de aprendizaje evaluados: Conoce las propiedades de las funciones continuas, y representa la función en un entorno de los puntos de discontinuidad. Aplica los conceptos de límite y derivada, así como los teoremas relacionados, a la resolución de problemas. Aplica la regla de L'Hôpital para resolver indeterminaciones en el cálculo de líímites. Aplica los métodos básicos para el cálculo de primitivas de funciones.

A. 3.

a) Planteamiento: 0.25 puntos. Resolución: 0.25 puntos.
b) Planteamiento: 0.5 puntos. Resolución: 0.25 por cada punto correcto.
c) Planteamiento: 0.5 puntos. Resolución: 0.5 puntos.

Estándares de aprendizaje evaluados: Realiza operaciones elementales con vectores, manejando correctamente los conceptos de base y de dependencia e independencia lineal. Obtiene las ecuaciones de rectas y planos en diferentes situaciones. Maneja el producto escalar y vectorial de dos vectores, significado geométrico, expresión analítica y propiedades. Conoce el producto mixto de tres vectores, su significado geométrico, su expresión analítica y propiedades. Determina ángulos, distancias, áreas y volúmenes utilizando los productos escalar, vectorial y mixto, aplicándolos en cada caso a la resolución de problemas geométricos.

A. 4.

a) Planteamiento: 0.5 puntos. Resolución: 0.25 puntos.
b) Planteamiento: 0.5 puntos. Resolución: 0.25 puntos.
c) Planteamiento: 0.75 puntos. Resolución: 0.25 puntos.

Estándares de aprendizaje evaluados: Conoce las características y los parámetros de la distribución normal y valora su importancia en el mundo científico. Calcula probabilidades de sucesos asociados a fenómenos que pueden modelizarse mediante la distribución normal a partir de la tabla de la distribución o mediante calculadora. Utiliza un vocabulario adecuado para describir situaciones relacionadas con el azar.

MATEMÁTICAS II

CRITERIOS ESPECÍFICOS DE CORRECCIÓN Y ESTÁNDARES EVALUADOS EN CADA PREGUNTA

Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.
En cada ejercicio, aunque el procedimiento seguido sea diferente al propuesto en el documento de soluciones, cualquier argumento válido que conduzca a la solución será valorado con la puntuación asignada.
Los estándares de aprendizaje del bloque 1 se evaluarán transversalmente en todos los ejercicios, penalizando en la calificación de cada respuesta la falta de justificación razonada o de precisión y valorando las estrategias, razonamientos y toma adecuada de decisiones.

B. 1.

a) Planteamiento: 0.5 puntos. Resolución: 0.25 puntos
b) Cálculo del producto AC: 0.25 puntos. Cálculo correcto de la existencia de la inversa: 0.25 puntos. Cálculo de la inversa para $m = 0$: 0.5 puntos
c) Cálculo de B^2: 0.25 puntos. Cálculo de $(B - I)$: 0.25 puntos. Cálculo correcto del parámetro: 0.25 puntos.

Estándares de aprendizaje evaluados: Realiza operaciones con matrices y aplica las propiedades de estas operaciones adecuadamente. Determina las condiciones para que una matriz tenga inversa y la calcula empleando el método más adecuado.

B. 2.

a) Planteamiento: 0.5 puntos. Resolución: 1.5 puntos (cálculo del valor que optimiza la función área: 1 punto; cálculo de las dimensiones pedidas: 0.5 puntos).
b) Planteamiento: 0.25 puntos. Resolución: 0.25 puntos.

Estándares de aprendizaje evaluados: Aplica los conceptos de límite y de derivada, así como los teoremas relacionados, a la resolución de problemas. Plantea problemas de optimización relacionados con la geometría o con las ciencias experimentales y sociales, los resuelve e interpreta el resultado obtenido dentro del contexto.

B. 3.

a) Planteamiento: 0.25 puntos. Resolución: 0.5 puntos.
b) Planteamiento: 0.25 puntos. Resolución: 0.5 puntos.
c) Planteamiento: 0.25 puntos. Resolución: 0.75 puntos.

Estándares de aprendizaje evaluados: Expresa la ecuación de la recta de sus distintas formas, pasando de una a otra correctamente, identificando en cada caso sus elementos característicos, y resolviendo los problemas afines entre rectas. Analiza la posición relativa de planos y rectas en el espacio, aplicando métodos matriciales y algebraicos. Obtiene las ecuaciones de rectas y planos en diferentes situaciones. Maneja el producto escalar y vectorial de dos vectores, significado geométrico, expresión analítica y propiedades. Determina ángulos, distancias, áreas y volúmenes utilizando los productos escalar, vectorial y mixto, aplicándolos en cada caso a la resolución de problemas geométricos.

B. 4.

a) Planteamiento: 0.5 puntos. Resolución: 0.25 puntos.
b) Planteamiento: 0.5 puntos. Resolución: 0.25 puntos.
c) Planteamiento: 0.25 puntos. Resolución: 0.25 puntos.
d) Planteamiento: 0.25 puntos. Resolución: 0.25 puntos.

Estándares de aprendizaje evaluados: Calcula la probabilidad de sucesos en experimentos simples y compuestos mediante la regla de Laplace, las fórmulas derivadas de la axiomática de Kolmogorov y diferentes técnicas de recuento. Calcula probabilidades a partir de los sucesos que constituyen una partición del espacio muestral. Utiliza un vocabulario adecuado para describir situaciones relacionadas con el azar.

MATEMÁTICAS II—SOLUCIONES
Documento de trabajo orientativo

A.1.
Si x representa el número de defensas, y el de centrocampistas y z el de delanteros, se tiene el siguiente sistema:

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+y+z & = & 440 \\ x-3y+3z & = & 0 \\ -2x+y+4z & = & 50 \end{array}\right. .$$

Por lo tanto, el número de defensas es 210, el de centrocampistas es 150 y el de delanteros 80.

A.2.
a) Si $x \neq 1$ la función es continua (propiedades de las funciones continuas). En $x=1$,

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{e(x-1)}{e^x-e} \overset{\text{L'Hôpital}}{=} \lim_{x\to 1^-} \frac{e}{e^x} = 1; \quad \lim_{x\to 1^+} \frac{1}{4x-3} = 1; \quad f(1)=1,$$

por lo que $f(x)$ es continua en $\mathbb{R}$.
Asíntota horizontal por la derecha: $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{4x-3} = 0$, con lo que la ecuación es $y=0$.
Asíntota oblicua por la izquierda: pendiente de la recta, $m = \lim_{x\to-\infty} \frac{e(x-1)}{x(e^x-e)} = -1$; ordenada en el origen, $n = \lim_{x\to-\infty} \left[\frac{e(x-1)}{e^x-e} + x\right] = \lim_{x\to-\infty} \frac{xe^x-e}{e^x-e} = 1$, con lo que la ecuación es $y=-x+1$.
b) $g(x) = e(x-1)$, $g'(x) = e$; por tanto, $g'(0) = e$.
c) $\int_1^5 \sqrt{f(x)}\,dx = \int_1^5 (4x-3)^{-1/2}\,dx = \left(\frac{1}{2}(4x-3)^{1/2}\right)\Big|_1^5 = \frac{\sqrt{17}-1}{2}$.

A.3.
a) Un vector normal a dicho plano es $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AA'} = (0,2,0)\times(0,0,5) = (10,0,0)$, y así una ecuación es $x=1$.
b) Los vectores $\overrightarrow{BC}$ y $\overrightarrow{AD}$ son perpendiculares a $\overrightarrow{AB} = (0,2,0)$ y al vector normal al plano de la rampa $\vec{n} = (4,0,-3)$. Ambos tienen entonces la misma dirección que $\vec{n}\times\overrightarrow{AB} = (4,0,-3)\times(0,2,0) = (6,0,8)$. El lado del cuadrado mide $|\overrightarrow{AB}| = 2$, y así:

$$C = B + \overrightarrow{BC} = (1,3,1) + 2\left(\frac{3}{5},0,\frac{4}{5}\right) = \left(\frac{11}{5},3,\frac{13}{5}\right) \quad \text{y} \quad D = A + \overrightarrow{AD} = (1,1,1) + 2\left(\frac{3}{5},0,\frac{4}{5}\right) = \left(\frac{11}{5},1,\frac{13}{5}\right).$$

c) El volumen del paralelepípedo se puede calcular con el producto mixto $\overrightarrow{AA'}\cdot(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD})$:

$$\text{volumen del depósito} = \left|\overrightarrow{AA'}\cdot(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD})\right| = \left|\det\begin{pmatrix}\overrightarrow{AA'}\\ \overrightarrow{AB}\\ \overrightarrow{AD}\end{pmatrix}\right| = \left|\det\begin{pmatrix}0 & 0 & 5\\ 0 & 2 & 0\\ \frac{6}{5} & 0 & \frac{8}{5}\end{pmatrix}\right| = 12\,\text{u}^3.$$

A.4.
$X \equiv$ puntuación $\sim N(100;35)$

a) $P(100 < X < 140) = P(0 < Z < 1.14) = 0.8729 - 0.5 = 0.3729 \Rightarrow 37.29\,\%$.
b) $P(X < 95) = P(Z < -0.14) = P(Z > 0.14) = 1 - 0.5557 = 0.4443$.
c) $P(X \geq k) = P\left(Z \geq \frac{k-100}{35}\right) = P\left(Z \leq \frac{-k+100}{35}\right) = 0.7517 \Rightarrow \frac{-k+100}{35} = 0.68 \Rightarrow k = 76.2$ es la puntuación mínima necesaria para cobrar los objetivos.

SOLUCIONES

Documento de trabajo orientativo

B.1.

a) $A^tB = \begin{pmatrix} 2m^2-2 & -m \\ -2m & 1 \\ 3m & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow m = 1.$

b) $AC = \begin{pmatrix} 5 & -m-2 \\ 3m & -m+2 \end{pmatrix} \Rightarrow |AC| = 3m^2 + m + 10 = 0$. Esta ecuación no tiene solución. Por lo tanto, $\forall m \in \mathbb{R}$ existe la matriz inversa de AC.

Para $m = 0$, se tiene que $(AC)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

c) $B^2 = \begin{pmatrix} 4m^2-1 & -2m \\ 2m & -1 \end{pmatrix}$ y $B - I = \begin{pmatrix} 2m-1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Por lo tanto, $m = \dfrac{1}{2}$.

B.2.

a) Sean x y $72/x$ las longitudes de los lados mayor y menor, respectivamente, del rectángulo dedicado al huerto (su área es 72 metros cuadrados). El área de la zona de cultivo de hortalizas vendrá dada por la función

$$A(x) = (x-2)\left(\frac{72}{x} - 1\right) = 74 - x - \frac{144}{x}.$$

El máximo de la función se alcanza en el valor $x = 12$ por lo que las dimensiones del huerto serán 12 metros de largo por 6 metros de ancho.

b) El área de la zona de cultivo de hortalizas será 50 metros cuadrados.

B.3.

a) Unas ecuaciones paramétricas de las rectas r y s son, respectivamente, $r \equiv (x,y,z) = (1, 1+t, 2+2t),\ t \in \mathbb{R}$ y $s \equiv (x,y,z) = (-2+2\lambda, 6-2\lambda, \lambda),\ \lambda \in \mathbb{R}$. El sistema de ecuaciones en t y λ

$$\begin{cases} 1 = -2 + 2\lambda \\ 1 + t = 6 - 2\lambda \\ 2 + 2t = \lambda \end{cases}$$

es incompatible; además, dado que las direcciones de las rectas r y s son distintas, estas dos rectas se cruzan.

b) La recta t paralela a s lleva su misma dirección, la del vector $(2,-2,1)$. El ángulo θ que forman estas dos rectas es el ángulo que forman sus vectores directores:

$$\cos\theta = \frac{(0,1,2)\cdot(2,-2,1)}{|(0,1,2)|\cdot|(2,-2,1)|} = 0.$$

Por tanto, las rectas r y t son perpendiculares.

c) La proyección del punto P sobre la recta s será el punto intersección de la recta s con el plano que es perpendicular a dicha recta y contiene al punto P. El plano indicado tiene por ecuación $2x - 2y + z - 2 = 0$, y su intersección con la recta s, es decir, la proyección de P sobre s, es el punto $P'(2,2,2)$.

B.4.

a) $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - \dfrac{4}{5} = \dfrac{1}{5}$.

b) Primero calculamos la probabilidad de la intersección. $P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = \dfrac{11}{20} + \dfrac{13}{20} - \dfrac{4}{5} = \dfrac{2}{5}$.

$P(\overline{A} \cup \overline{B}) = P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B) = 1 - \dfrac{2}{5} = \dfrac{3}{5}$.

c) $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) = \dfrac{11}{20} - \dfrac{2}{5} = \dfrac{3}{20}$.

d) $P(A \cap B) = \dfrac{2}{5} \neq P(A) \cdot P(B) = \dfrac{11}{20} \cdot \dfrac{13}{20} \Rightarrow A$ y B no son sucesos independientes.

ORIENTACIONES PARA LA EVALUACIÓN DEL ACCESO A LA UNIVERSIDAD DE
LA ASIGNATURA MATEMÁTICAS II.

Para la elaboración de las pruebas se seguirán las características, el diseño y el contenido establecido en el currículo básico de las enseñanzas del segundo curso de bachillerato LOMCE que está publicado en el Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato.