| | | |
|---|---|---|
| | **UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID**<br>EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LAS ENSEÑANZAS<br>UNIVERSITARIAS OFICIALES DE GRADO<br>Curso **2021-2022**<br>**MATERIA**: MATEMÁTICAS II | **Modelo**<br>**Orientativo** |

**INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN**

Después de leer atentamente el examen, responda razonadamente cuatro preguntas cualesquiera a elegir entre las ocho que se proponen.

**Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.**

**CALIFICACIÓN:** La valoración de cada ejercicio se especifica en el enunciado.

**TIEMPO:** 90 minutos. Cada pregunta se calificará sobre 2,5 puntos.

---

**A.1. Calificación máxima:** 2.5 puntos.

En una academia de idiomas se imparten clases de inglés, francés y alemán. Cada alumno está matriculado en un único idioma. El número de alumnos matriculados en inglés representa el 60% del total de alumnos de la academia. Si diez alumnos de francés se hubiesen matriculado en alemán, ambos idiomas tendrían el mismo número de alumnos. Además, la cuarta parte de los alumnos de inglés excede en ocho al doble de la diferencia entre los alumnos matriculados en francés y alemán. Calcule el número de alumnos matriculados en cada idioma.

**A.2. Calificación máxima:** 2.5 puntos.

Sea la función

$$f(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} & \text{si } x < 0 \\ x\, e^{4-x^2} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

a) (0.75 puntos) Estudie la continuidad y la derivabilidad de $f$ en $x = 0$.

b) (1 punto) Determine los extremos relativos de $f(x)$ en $(0, \infty)$.

c) (0.75 puntos) Calcule $\displaystyle\int_0^2 f(x)\, dx$.

**A.3. Calificación máxima:** 2.5 puntos.

Una sonda planetaria se lanza desde el punto $P(1, 0, 2)$ y sigue una trayectoria rectilínea que pasa por el punto $Q(3, 1, 0)$ antes de impactar en una zona plana de la superficie del planeta, que tiene por ecuación $\pi \equiv 2x - y + 2z + 5 = 0$. Se pide:

a) (1.5 puntos) Calcular las coordenadas del punto de impacto y el coseno del ángulo entre la trayectoria de la sonda y el vector normal al plano $\pi$.

b) (1 punto) Sabiendo que la alarma de proximidad se dispara antes de llegar a la superficie cuando la distancia al planeta es $1$, determinar en qué punto estará la sonda al sonar la alarma.

**A.4. Calificación máxima:** 2.5 puntos.

Una urna contiene $7$ bolas blancas y $12$ bolas negras. Se extrae al azar una bola de la urna y se sustituye por dos del otro color. A continuación, se extrae una segunda bola de la urna. Se pide:

a) (1 punto) Calcular la probabilidad de que la segunda bola extraída sea blanca.

b) (0.75 puntos) Calcular la probabilidad de que la segunda bola extraída sea de distinto color que la primera.

c) (0.75 puntos) Calcular la probabilidad de que la primera bola extraída haya sido negra, sabiendo que la segunda bola fue blanca.

**B.1. Calificación máxima:** 2.5 puntos.

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & a \\ 1 & 0 & a \\ a & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$. Se pide:

a) (0.5 puntos) Calcular los valores de $a$ para los que la matriz $A$ no tiene inversa.

b) (1 punto) Para $a = 1$, calcular la inversa de la matriz $A$.

c) (1 punto) Para $a = 2$, resolver el sistema $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = B$.

**B.2. Calificación máxima:** 2.5 puntos.

Sea $f(x) = x + x^2$. Se pide:

a) (1 punto) Hallar el área de la región acotada que está limitada por la gráfica de $f$ y la recta $y = 2x$.

b) (1.5 puntos) Una partícula en movimiento parte del origen y sigue la trayectoria determinada por la gráfica de $f$. En el punto $(1, f(1))$ la partícula sale despedida en la dirección de la recta tangente. Determinar en qué punto choca con la recta vertical $x = 2$.

**B.3. Calificación máxima:** 2.5 puntos.

Dados los planos $\pi_1 \equiv x - 2y + 3z = 6$, $\pi_2 \equiv 3x - z = 2$ y el punto $A(1, 7, 1)$, se pide:

a) (0.5 puntos) Comprobar que $\pi_1$ y $\pi_2$ son perpendiculares.

b) (1 punto) Calcular el volumen de un cubo que tenga una cara en el plano $\pi_1$, otra cara en el plano $\pi_2$, y un vértice en el punto $A$.

c) (1 punto) Calcular el punto simétrico de $A$ respecto de $\pi_1$.

**B.4. Calificación máxima:** 2.5 puntos.

Dos características genéticas $A$ y $B$ aparecen en una especie animal con probabilidades respectivas de $0.2$ y $0.3$. Sabiendo que la aparición de una de ellas es independiente de la aparición de la otra, se pide calcular:

a) (0.5 puntos) La probabilidad de que un individuo elegido al azar presente ambas características.

b) (0.5 puntos) La probabilidad de que no presente ninguna de ellas.

c) (0.75 puntos) La probabilidad de que presente solamente una de ellas.

d) (0.75 puntos) La probabilidad de que, si elegimos al azar $10$ individuos, exactamente $3$ de ellos presenten la característica $A$.