MATEMÁTICAS

1º Y 2º BACHILLERATO

Integrales

www.tipsacademy.es

Integral Indefinida

La integral indefinida de una función f(x) es el conjunto de todas sus primitivas, y se representa como $\int dx$.

Se lee "integral de diferencial de x". Por tanto, si F(x) es una primitiva de f(x): $\int f(x)dx = F(x) + C$

A C se la denomina constante de integración, y el dx nos indica que estamos integrando respecto de x.

Propiedades de la Integral

Suma y Resta de integrales: $\int f(x) + g(x)dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$

Producto por un número real: $\int k\, f(x)dx = k \int f(x)dx$

Se pueden meter números dentro de la integral siempre y cuando pongamos sus inversos fuera de ella:

$$\int f(x)\, dx = \frac{1}{a}\int a\ f(x)\, dx \qquad \int f(x)\, dx = a\int \frac{1}{a}\ f(x)\, dx$$

Los números que multipliquen o dividan a todo el interior de la integral podrán salir fuera de la integral multiplicando o dividiendo.

$$\int \frac{1}{a}\ f(x)\, dx = \frac{1}{a}\int\ f(x)\, dx \qquad \int a\ f(x)\, dx = a\int\ f(x)\, dx$$

Tipo 1 de integrales: Integrales Inmediatas

Las integrales inmediatas son las integrales las cuáles si conseguimos que dentro de la integral se cumplan unos requisitos el resultado será siempre inmediato y directo.

Potencias $\quad \int f'(x)\ \ f(x)^n\, dx = \frac{f(x)^{n+1}}{n+1}$

Ejemplos: $\quad \int x^3\, dx = \frac{x^4}{4} + C \qquad \int (x+3)^3\, dx = \frac{(x+3)^4}{4} + C$

$$\int (2x+3)^3\, dx = \frac{1}{2}\int 2\ (2x+3)^3\, dx = \frac{1}{2}\ \frac{(2x+3)^4}{4} + C$$

$$\int (x+1)(x^2+2x)^3\, dx = \frac{1}{2}\int 2\ (x+1)(x^2+2x)^3\, dx = \frac{1}{2}\ \frac{(x^2+2x)^4}{4} + C$$

$$\int \frac{5}{(2x+3)^3}\, dx = \int 5\ (2x+3)^{-3}\, dx = \frac{1}{2}\ 5\int 2\ (2x+3)^{-3}\, dx = \frac{1}{2}\ 5\ \frac{(2x+3)^{-2}}{-2} = -\frac{5}{4\ (2x+3)^2} + C$$

$$\int \sqrt{(2x+3)^3}\, dx = \int (2x+3)^{3/2}\, dx = \frac{1}{2}\int 2\ (2x+3)^{3/2}\, dx = \frac{1}{2}\ \frac{(2x+3)^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1} = \frac{\sqrt{(2x+3)^5}}{5} + C$$

$$\int \frac{Ln\ x}{x}\, dx = \int \frac{1}{x}\ Ln\ x\ \, dx = \frac{Ln^2}{2} + C$$

$$\int \cos(4x)\ sen\ (4x)\, dx = \frac{1}{4}\int 4\ \cos(4x)\ sen\ (4x)\, dx = \frac{1}{4}\ \frac{sen^2(4x)}{2} + C = \frac{sen^2(4x)}{8} + C$$

Exponenciales $\int f'(x)\ \ a^{f(x)}\ dx = \frac{a^{f(x)}}{Ln\ a}$

Ejemplos: $\int 4^x\ dx = \frac{4^x}{Ln\ 4} + C$ $\int 4^{(x+7)}\ dx = \frac{4^{(x+7)}}{Ln\ 4} + C$ $\int 4^{(2x+7)}\ dx = \frac{1}{2}\int 2\ \ 4^{(2x+7)}\ dx = \frac{1}{2}\ \frac{4^{(2x+7)}}{Ln\ 4} + C$

$$\int x\ 4^{x^2}\ dx = \frac{1}{2}\int 2\ x\ 4^{x^2} dx = \frac{1}{2}\ \frac{4^{x^2}}{Ln\ 4} + C$$

Exponenciales número e $\int f'(x)\ \ e^{f(x)}\ dx = e^{f(x)}$

Ejemplos: $\int e^x\ dx = e^x + C$ $\int e^{(x+7)}\ dx = e^{(x+7)} + C$ $\int e^{(2x+7)}\ dx = \frac{1}{2}\int 2\ \ e^{(2x+7)}\ dx = \frac{1}{2}\ \ e^{(2x+7)} + C$

$$\int x\ e^{x^2}\ dx = \frac{1}{2}\int 2\ x\ e^{x^2} dx = \frac{1}{2}\ \ e^{x^2} + C$$

Logaritmo Neperiano $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\ \ dx = Ln\ |f(x)|$

Ejemplos: $\int Tg\ (x)\ dx = \int \frac{sen\ x}{\cos x}\ dx = -\int \frac{-\ senx}{\cos x}\ dx = -Ln\ |\cos x| + C$

$$\int \frac{x+1}{x^2+\ 2x}\ dx = \frac{1}{2}\int \frac{2\ (x+1)}{x^2+\ 2x}\ dx = \frac{1}{2}\ Ln\ |x^2+\ 2x| + C$$

Trigonométricas $\int f'(x)\ \ sen\ f(x)\ dx = -\cos\ f(x)$ $\int f'(x)\ cosf(x)\ dx = sen\ f(x)$

$\int f'(x)\ (1 + Tg^2[\ f(x)])\ dx = Tg\ f(x)$ $\int \frac{f'(x)}{cos^2[\ f(x)]} dx = Tg\ f(x)$

$$\int f'(x)\ sec^2[f(x)]\ dx = Tg\ f(x)$$

$$\int \frac{f'(x)}{1 + f^2(x)}\ dx = Arctg\ f(x) \int \frac{f'(x)}{\sqrt{1 - f^2(x)}}\ dx = Arcsen\ f(x) \int \frac{-f'(x)}{\sqrt{1 - f^2(x)}}\ dx = Arcos\ f(x)$$

Ejemplos:

$$\int x\ sen(x^2)\ dx = \frac{1}{2}\int 2x\ sen\ (x^2)dx = -\ \frac{1}{2}\ \cos(x^2) + C$$

$$\int \cos(3x)\ dx = \frac{1}{3}\int 3\cos(3x)\ dx = \frac{1}{3}\ sen\ (3x) + C$$

$$\int \frac{2x}{cos^2(x^2)}\ dx = Tg\ (x^2) + C$$

$$\int \frac{9}{9 + x^2}\ dx = \int \frac{\frac{9}{9}}{\frac{9}{9} + \frac{x^2}{9}}\ dx = \int \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{3}\right)^2}\ dx = 3\int \frac{\frac{1}{3}}{1 + \left(\frac{x}{3}\right)^2}\ dx = 3\ Arctg\ \left(\frac{x}{3}\right) + C$$

Tipo 2 de integrales: Integrales por Partes

Las integrales por partes se aplica cuando el integrando es un producto de dos funciones y ninguna de ellas es la derivada de la otra:

$$\int f(x) \cdot g(x)\, dx = Siendo\ f(x) \neq g'(x)\ y\ g(x) \neq f(x)$$

$$\int u\, dv = u \cdot v - \int v\, du$$

Para saber a qué llamamos **u** o **dv** utilizaremos **ALPES,** la función que esté por encima será la **u**.

A: Arcos

L: Logarítmicas

P: Potencias

E: Exponenciales

S: Seno y coseno

Ejemplo: $\int x^2 \cdot e^x\, dx = x^2 \cdot e^x - \int 2x \cdot e^x\, dx = x^2 \cdot e^x - [\, 2x \cdot e^x - \int e^x \cdot 2\, dx] =$

$u = x^2 \quad du = 2x\, dx$ $\qquad\qquad$ $u = 2x \quad du = 2\, dx$

$dv = e^x\, dx \quad v = e^x$ $\qquad\qquad$ $dv = e^x\, dx \quad v = e^x$

$= x^2 \cdot e^x - [\, 2x \cdot e^x - 2 \cdot e^x\,] = x^2 \cdot e^x - 2x \cdot e^x + 2\, e^x = e^x\,(x^2 - 2x + 2)$

Cíclica: $\int cos(x) \cdot e^x\, dx = sen(x) \cdot e^x - \int sen(x) \cdot e^x\, dx = =$

$u = e^x \quad du = e^x\, dx$ $\qquad\qquad$ $u = e^x \quad du = e^x\, dx$

$dv = cos(x)\, dx \quad v = sen(x)$ $\qquad\qquad$ $dv = sen(x)\, dx \quad v = -cos(x)$

$= sen(x) \cdot e^x - [\, -cos(x) \cdot e^x - \int -cos(x) \cdot e^x\, dx\,] =$

$$\int cos(x) \cdot e^x\, dx = sen(x) \cdot e^x + cos(x) \cdot e^x - \int cos(x) \cdot e^x\, dx$$

$I = sen(x) \cdot e^x + cos(x) \cdot e^x - I$

$2I = sen(x) \cdot e^x + cos(x) \cdot e^x$

$$I = \frac{sen(x) \cdot e^x + cos(x) \cdot e^x}{2} = \frac{e^x(sen(x) + cos(x)\,)}{2} + C$$

Tipo 3 de integrales: Integrales Racionales con numerador con mayor o igual grado que el denominador

Las integrales racionales se aplican cuando el integrando es un cociente de polinomios donde el polinomio del numerador tiene mayor o igual grado que el polinomio del denominador.

$$\int \frac{f(x)}{g(x)}\,dx = Siendo\ \ f(x)\ y\ g(x)\ dos\ polinomios\ y\ g(x) < grado\ que\ f(x)$$

Se usa la regla de la división para modificar al integral: D = d * C + R; al dividir toda la expresión entre el divisor nos queda: $\frac{D}{d} = C + \frac{R}{d}$

Ejemplo: $\int \frac{x^2}{x+3}$ = Al dividir con "cajita" nos sale Resto 9 y Cociente x-3 ; podremos convertir la integral en dos integrales:

$$\int \frac{x^2}{x+3} = \int x - 3\,dx + \int \frac{9}{x+3}\,dx = \frac{x^2}{2} - 3x + 9\,Ln\,|x+3| + C$$

Tipo 4 de integrales: Integrales Racionales con numerador con menor grado que el denominador

Las integrales racionales se aplican cuando el integrando es un cociente de polinomios donde el polinomio del numerador tiene menor grado que el polinomio del denominador.

$$\int \frac{f(x)}{g(x)}\,dx = Siendo\ \ f(x)\ y\ g(x)\ dos\ polinomios\ y\ g(x) > grado\ que\ f(x)$$

Si el grado del numerador es menor que el del denominador, se calculan las raíces del denominador.

Vamos a estudiar los dos casos siguientes.

Caso 1: Si todas las raíces del denominador son reales (a,b,c…), el cociente de polinomios se descompone en una suma de fracciones según la siguiente regla:

• Cada raíz simple a contribuye a esa suma con un sumando de la forma: $\frac{A}{x-a}$

• Cada raíz doble b contribuye a esa suma con dos sumandos de la forma: $\frac{A}{x-b} + \frac{B}{(x-b)^2}$

• Cada raíz triple c contribuye a esa suma con tres sumandos de la forma: $\frac{A}{x-c} + \frac{B}{(x-c)^2} + \frac{C}{(x-c)^3}$

Ejemplo: $\int \frac{2x^2+5x-1}{x^3+x^2-2x}\,dx =$

Primero se sacan las raíces del denominador: en este caso son: $x_1 = 0$; $x_2 = 1$ y $x_3 = -2$ Por tanto:

$$\frac{2x^2+5x-1}{x^3+x^2-2x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x-1} = \frac{A\cdot(x+2)\cdot(x-1) + B\cdot x\cdot(x-1) + C\cdot x\cdot(x+2)}{x\cdot(x+2)\cdot(x-1)}$$

Igualamos los dos numeradores:

$$2x^2+5x-1 = A\cdot(x+2)\cdot(x-1) + B\cdot x\cdot(x-1) + C\cdot x\cdot(x+2)$$

Calculamos A, B y C dando valores a la ecuación (mejor usar las raíces para que sea más rápido)

Para x=0 quedaría -1 = -2 A donde A = 1/2

Para x= -2 quedaría -3 = 6 B donde B = -1/2

Para x = 1 quedaría 6 = 3C donde C = 2

$$\int \frac{2x^2 + 5x - 1}{x^3 + x^2 - 2x}\, dx = \int \frac{\frac{1}{2}}{x}\, dx - \int \frac{\frac{1}{2}}{x+2}\, dx + \int \frac{2}{x-1}\, dx = \boldsymbol{\frac{1}{2}\, Ln\, |x| - \frac{1}{2}\, Ln|x+2| + 2\, Ln|x-1|}$$