UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID
PRUEBA DE ACCESO A LAS ENSEÑANZAS UNIVERSITARIAS OFICIALES DE GRADO
2015-2016
MATERIA: MATEMÁTICAS II

INSTRUCCIONES GENERALES Y VALORACIÓN

Después de leer atentamente todas las preguntas, el alumno deberá escoger una de las dos opciones propuestas y responder razonadamente a las cuestiones de la opción elegida. Para la realización de esta prueba se puede utilizar calculadora científica, siempre que no disponga de capacidad de representación gráfica o de cálculo simbólico. **Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas**.
Calificación: Las preguntas 1ª y 2ª se valorarán sobre 3 puntos; las preguntas 3ª y 4ª sobre 2 puntos.
Tiempo: 90 minutos.

OPCIÓN A

Ejercicio 1. Calificación máxima: 3 puntos.
Dado el sistema de ecuaciones lineales:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 2y & + & kz & = & 1\,, \\ 2x & + & 4y & + & z & = & 3\,, \\ kx & + & 2y & - & z & = & 3\,, \end{array}\right.$$

se pide:

a) (2 puntos) Discutirlo según los valores de k.
b) (0,5 puntos) Resolverlo en el caso $k = 2$.
c) (0,5 puntos) Resolverlo en el caso $k = 1$.

Ejercicio 2. Calificación máxima: 3 puntos.
Dada la función:

$$f(x) = 2x^2 - \frac{x^3}{3}\,,$$

se pide:

a) (0,75 puntos) Hallar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$.
b) (0,5 puntos) Determinar las coordenadas de sus extremos relativos.
c) (0,75 puntos) El valor máximo que puede tener la pendiente de una recta tangente a la gráfica de $f(x)$.
d) (1 punto) El volumen del cuerpo de revolución que se obtiene al girar la gráfica de la función en torno al eje OX, entre los puntos de corte de la misma con dicho eje.

Ejercicio 3. Calificación máxima: 2 puntos.
Dados el plano $\pi \equiv x + 2y - z = 5$ y la recta $r \equiv \left\{\begin{array}{l} x + y - 2z = 1\,, \\ 2x + y - z = 2\,, \end{array}\right.$ se pide:

a) (1 punto) Determinar la ecuación del plano que contiene a la recta r y pasa por el punto $P(1, 0, 1)$.
b) (1 punto) Hallar la ecuación de la recta que es perpendicular al plano π y pasa por el punto $Q(2, 1, 1)$.

Ejercicio 4. Calificación máxima: 2 puntos.
Dados los puntos $P(1, 1, 3)$ y $Q(0, 1, 1)$, se pide:

a) (1 punto) Hallar todos los puntos R que equidistan de P y Q. Describir dicho conjunto de puntos.
b) (1 punto) Hallar los puntos S contenidos en la recta que pasa por P y Q que verifiquen que $d(P, S) = 2\,d(Q, S)$.

OPCIÓN B

Ejercicio 1. Calificación máxima: 3 puntos.
Dados los planos

$$\pi_1 \equiv 3x + 4y - 5z - 7 = 0\,, \qquad \pi_2 \equiv x - 2y + z - 3 = 0\,,$$

se pide:

a) (1 punto) Hallar un vector unitario cuya dirección sea paralela a los planos π_1 y π_2.
b) (1 punto) Hallar la distancia del punto $P(3, -1, 2)$ al plano π_1.
c) (1 punto) Hallar el coseno del ángulo que forman los planos π_1 y π_2.

Ejercicio 2. Calificación máxima: 3 puntos.
Dada la función:

$$f(x) = \begin{cases} |x|\,, & \text{si } x < 1\,, \\ x\,e^{1-x}\,, & \text{si } x \geq 1\,, \end{cases}$$

se pide:

a) (1,5 puntos) Estudiar su continuidad y derivabilidad y calcular la función derivada f' donde sea posible.
b) (0,5 puntos) Calcular $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$.
c) (1 punto) Calcular $\displaystyle\int_{1}^{2} f(x)\,dx$.

Ejercicio 3. Calificación máxima: 2 puntos.
Dadas las matrices

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \qquad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \qquad O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

se pide:

a) (1 punto) Calcular el valor o valores de λ que hacen que el determinante de la matriz $M - \lambda I$ sea igual a 0.
b) (1 punto) Para $\lambda = -1$, resolver el sistema de ecuaciones lineales: $(M - \lambda I)X = O$.

Ejercicio 4. Calificación máxima: 2 puntos.
Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

resolver la ecuación matricial $AX + 3B = B(A^t + 3I)$, donde A^t denota la matriz transpuesta de A.