UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID
PRUEBA DE ACCESO A LAS ENSEÑANZAS UNIVERSITARIAS OFICIALES DE GRADO
Curso **2013-2014**
MATERIA: MATEMÁTICAS II

INSTRUCCIONES GENERALES Y VALORACIÓN

Después de leer atentamente todas las preguntas, el alumno deberá escoger una de las dos opciones propuestas y responder razonadamente a las cuestiones de la opción elegida. Para la realización de esta prueba se puede utilizar calculadora científica, siempre que no disponga de capacidad de representación gráfica o de cálculo simbólico. **Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.**
Calificación: Las preguntas 1ª y 2ª se valorarán sobre 3 puntos; las preguntas 3ª y 4ª sobre 2 puntos.
Tiempo: 90 minutos.

OPCIÓN A

Ejercicio 1. Calificación máxima: 3 puntos.
Dada la función

$$f(x) = \frac{1}{x+1} + \frac{x}{x+4},$$

se pide:

a) (1 punto) Determinar el dominio de f y sus asíntotas.
b) (1 punto) Calcular $f'(x)$ y determinar los extremos relativos de $f(x)$.
c) (1 punto) Calcular $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$.

Ejercicio 2. Calificación máxima: 3 puntos.
Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ 1 & a & 1 \\ a-1 & a & 2 \end{pmatrix}, \qquad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \qquad O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

se pide:

a) (1 punto) Determinar el valor o valores de a para los cuales no existe la matriz inversa A^{-1}.
b) (1 punto) Para $a = -2$, hallar la matriz inversa A^{-1}.
c) (1 punto) Para $a = 1$, calcular todas las soluciones del sistema lineal $AX = O$.

Ejercicio 3. Calificación máxima: 2 puntos.
Dados los puntos $A(2,0,-2)$, $B(3,-4,-1)$, $C(5,4,-3)$ y $D(0,1,4)$, se pide:

a) (1 punto) Calcular el área del triángulo de vértices A, B y C.
b) (1 punto) Calcular el volumen del tetraedro $ABCD$.

Ejercicio 4. Calificación máxima: 2 puntos.
Dados los planos

$$\pi_1 \equiv 2x + z - 1 = 0, \qquad \pi_2 \equiv x + z + 2 = 0, \qquad \pi_3 \equiv x + 3y + 2z - 3 = 0,$$

se pide:

a) (1 punto) Obtener las ecuaciones paramétricas de la recta determinada por π_1 y π_2.
b) (1 punto) Calcular el seno del ángulo que la recta del apartado anterior forma con el plano π_3.

OPCIÓN B

Ejercicio 1. Calificación máxima: 3 puntos.
Dados el plano π y la recta r siguientes:

$$\pi \equiv 2x - y + 2z + 3 = 0\,, \qquad r \equiv \begin{cases} x = 1 - 2t\,, \\ y = 2 - 2t\,, \\ z = 1 + t\,, \end{cases}$$

se pide:

a) (1 punto) Estudiar la posición relativa de r y π.
b) (1 punto) Calcular la distancia entre r y π.
c) (1 punto) Obtener el punto P' simétrico de $P(3,2,1)$ respecto del plano π.

Ejercicio 2. Calificación máxima: 3 puntos.
Dada la función:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{5\operatorname{sen} x}{2x} + \dfrac{1}{2}\,, & \text{si } x < 0\,, \\ a\,, & \text{si } x = 0\,, \\ xe^x + 3\,, & \text{si } x > 0\,, \end{cases}$$

se pide:

a) (1 punto) Hallar, si existe, el valor de a para que $f(x)$ sea continua.
b) (1 punto) Decidir si la función es derivable en $x = 0$ para algún valor de a.
c) (1 punto) Calcular la integral:

$$\int_1^{\ln 5} f(x)\,dx,$$

donde ln denota logaritmo neperiano.

Ejercicio 3. Calificación máxima: 2 puntos.
Dada la ecuación matricial:

$$\begin{pmatrix} a & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

donde B es una matriz cuadrada de tamaño 2×2, se pide:

a) (1 punto) Calcular el valor o valores de a para los que esta ecuación tiene solución.
b) (1 punto) Calcular B en el caso $a = 1$.

Ejercicio 4. Calificación máxima: 2 puntos.
Estudiar el rango de la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 & 5 \\ 2 & 2 & -1 & a \\ 1 & 1 & 1 & 6 \\ 3 & 1 & -4 & a \end{pmatrix}$$

según los valores del parámetro a.