UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID
PRUEBA DE ACCESO A LAS ENSEÑANZAS UNIVERSITARIAS
OFICIALES DE GRADO
Curso **2013-2014**
MATERIA: MATEMÁTICAS II

INSTRUCCIONES GENERALES Y VALORACIÓN

Después de leer atentamente todas las preguntas, el alumno deberá escoger una de las dos opciones propuestas y responder razonadamente a las cuestiones de la opción elegida. Para la realización de esta prueba se puede utilizar calculadora científica, siempre que no disponga de capacidad de representación gráfica o de cálculo simbólico. **Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.**
Calificación: Las preguntas 1ª y 2ª se valorarán sobre 3 puntos; las preguntas 3ª y 4ª sobre 2 puntos.
Tiempo: 90 minutos.

OPCIÓN A

Ejercicio 1. Calificación máxima: 3 puntos.
Dada las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \gamma & 0 & \alpha \\ 1 & \beta & \gamma \end{pmatrix}, \qquad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

se pide:

a) (1,5 puntos) Calcula α, β, γ para que $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ sea solución del sistema $AX = B$.

b) (1 punto) Si $\beta = \gamma = 1$ ¿Qué condición o condiciones debe cumplir α para que el sistema lineal homogéneo $AX = O$ sea compatible determinado?

c) (0,5 puntos) Si $\alpha = -1$, $\beta = 1$ y $\gamma = 0$, resuelve el sistema $AX = B$.

Ejercicio 2. Calificación máxima: 3 puntos.

Dados el punto $P(1, 0, 1)$, el plano $\pi \equiv x + 5y - 6z = 1$, y la recta $r \equiv \begin{cases} x = 0\,, \\ z = 0\,, \end{cases}$ se pide:

a) (1 punto) Calcular el punto P' simétrico a P respecto de π.

b) (1 punto) Hallar la distancia de P a r.

c) (1 punto) Calcular el volumen del tetraedro formado por el origen de coordenadas $O(0, 0, 0)$ y las intersecciones de π con los ejes coordenados OX, OY y OZ.

Ejercicio 3. Calificación máxima: 2 puntos.

a) (1 punto) Sea $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ una función dos veces derivable. Sabiendo que el punto de abscisa $x = -2$ es un punto de inflexión de la gráfica de $f(x)$ y que la recta de ecuación $y = 16x + 16$ es tangente a la gráfica de $f(x)$ en dicho punto, determinar:

$$f(-2), \quad f'(-2) \quad \text{y} \quad f''(-2).$$

b) (1 punto) Determinar el área de la región acotada limitada por la gráfica de la función $g(x) = x^4 + 4x^3$ y el eje OX.

Ejercicio 4. Calificación máxima: 2 puntos.
Calcular justificadamente:

a) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{1 - 2x - e^x + \operatorname{sen}(3x)}{x^2}$. b) $\displaystyle\lim_{x \to \infty} \frac{(5x^2 + 2)(x - 6)}{(x^2 - 1)(2x - 1)}$.

OPCIÓN B

Ejercicio 1. Calificación máxima: 3 puntos.

Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} a + \ln(1-x), & \text{si } x < 0, \\ x^2 e^{-x}, & \text{si } x \geq 0, \end{cases}$$

(donde ln denota logaritmo neperiano) se pide:

a) (1 punto) Calcular $\lim_{x\to\infty} f(x)$ y $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

b) (1 punto) Calcular el valor de a, para que $f(x)$ sea continua en todo $\mathbf{R}$.

c) (1 punto) Estudiar la derivabilidad de f y calcular f', donde sea posible.

Ejercicio 2. Calificación máxima: 3 puntos.

Dados el plano $\pi \equiv 2x - y = 2$, y la recta $r \equiv \begin{cases} x = 1, \\ y - 2z = 2, \end{cases}$ se pide:

a) (1 punto) Estudiar la posición relativa de r y π.

b) (1 punto) Determinar el plano que contiene a r y es perpendicular a π.

c) (1 punto) Determinar la recta que pasa por $A(-2,1,0)$, corta a r, y es paralela a π.

Ejercicio 3. Calificación máxima: 2 puntos.

Dada la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & a \\ -3 & 2 & a \\ 0 & a & -1 \end{pmatrix},$$

se pide:

a) (1 punto) Hallar el valor o valores de a para que la matriz A tenga inversa.

b) (1 punto) Calcular la matriz inversa A^{-1} de A, en el caso $a = 2$.

Ejercicio 4. Calificación máxima: 2 puntos.

Por la compra de cinco cuadernos, dos rotuladores y tres bolígrafos se han pagado veintidós euros. Si se compran dos cuadernos, un rotulador y seis bolígrafos, el coste es de catorce euros. Se pide:

a) (1 punto) Expresar, en función del precio de un bolígrafo, lo que costaría un cuaderno y lo que costaría un rotulador.

b) (1 punto) Calcular lo que deberíamos pagar si adquirimos ocho cuadernos y tres rotuladores.