MATEMÁTICAS

2º BACHILLERATO
Análisis: Límites

OPERACIONES CON EXPRESIONES INFINITAS.

Si $\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$ y $\lim_{x\to\infty} g(x)=\infty$, hay operaciones que se pueden realizar con los límites que tienen resultados que se pueden comprobar fácilmente.

Sumas

$$\infty + l = \infty$$

$$\infty + \infty = \infty$$

$$(-\infty)+l=-\infty$$

$$(-\infty)+(-\infty)=-\infty$$

$$-(-\infty)=\infty$$

Productos

$$\infty\cdot\infty=\infty$$

Si $l>0$, $\begin{cases} \infty\cdot l=\infty \\ (-\infty)\cdot l=-\infty \end{cases}$

Si $l<0$, $\begin{cases} \infty\cdot l=-\infty \\ (-\infty)\cdot l=\infty \end{cases}$

Cocientes

$$\frac{l}{\infty}=0$$

$\dfrac{l}{0}=\pm\infty$, si $l\neq 0$

$$\frac{\infty}{0}=\pm\infty$$

$$\frac{0}{\infty}=0$$

Potencias

$$\infty^{\infty}=\infty$$

$$\infty^{-\infty}=0$$

Si $l>0$, $\infty^{l}=\infty$

Si $l<0$, $\infty^{l}=0$

Si $l\neq 0$, $l^{0}=1$

Si $l>1$, $\begin{cases} l^{\infty}=\infty \\ l^{-\infty}=0 \end{cases}$

Si $0<l<1$, $\begin{cases} l^{\infty}=0 \\ l^{-\infty}=\infty \end{cases}$

INDETERMINACIONES

Hay casos en los que no se puede aventurar el resultado de una operación entre límites. En este caso, decimos que son **INDETERMINACIONES** que hemos de resolver para saber a qué valores tiende (la información de los límites no es información suficiente para saber el límite de la operación, hay que seguir investigando). Estas indeterminaciones son:

$$\infty - \infty \qquad (\pm\infty)\cdot 0 \qquad \frac{0}{0} \qquad \infty^0$$

$$1^{\infty} \qquad 1^{-\infty} \qquad 0^0 \qquad \frac{\pm\infty}{\pm\infty}$$

INDETERMINACIÓN $\frac{\infty}{\infty}$

a) Cociente de polinomios:

Este cálculo se resuelve con sencillez si prestamos atención a los términos de mayor grado del numerador y del denominador.

Así, teniendo: $f(x)=\dfrac{ax^p+a'x^{p-1}+\ldots.}{bx^q+b'x^{q-1}+\ldots}$, podemos tener tres casos:

- Si $p>q$, $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{ax^p+a'x^{p-1}+\ldots.}{bx^q+b'x^{q-1}+\ldots}=\pm\infty$ (el signo de ∞ depende de los signos de a y b)
- Si $p<q$, $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{ax^p+a'x^{p-1}+\ldots.}{bx^q+b'x^{q-1}+\ldots}=0$
- Si $p=q$, $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{ax^p+a'x^{p-1}+\ldots.}{bx^q+b'x^{q-1}+\ldots}=\dfrac{a}{b}$

b) Cociente de otras expresiones infinitas:

Cuando en el numerador o en el denominador tenemos expresiones que no son exactamente polinomios (como por ejemplo, expresiones radicales del tipo $\sqrt[p]{ax^n+\ldots}$) la regla anterior también sirve, aplicando el razonamiento que vemos en el siguiente ejemplo:

Calcula el siguiente límite: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[5]{3x^7+5x^{18}-x}}{\sqrt[9]{2x^{19}+x^5-1}}$

*Para calcular este límite, lo que **no se puede hacer es lo siguiente:***

$$\frac{\sqrt[5]{3x^7+5x^{18}-x}}{\sqrt[9]{2x^{19}+x^5-1}}=\frac{\sqrt[5]{3x^7}+\sqrt[5]{5x^{18}}-\sqrt[5]{x}}{\sqrt[9]{2x^{19}}+\sqrt[9]{x^5}-\sqrt[9]{1}}$$

Lo que sí se puede hacer es plantearnos, hablando de límites, el orden que tendrá el infinito del numerador y el orden que tendrá el del denominador. En ese sentido, el orden del numerador vendrá marcado por el mayor exponente del polinomio (el del término $5x^{18}$), ***pero el orden no será 18, sino que, al igual que todo el polinomio, estará afectado por una raíz 5.***

Por este motivo, se puede considerar que el numerador tiene un orden $\frac{18}{5}$. De la misma forma, el orden del denominador será de $\frac{19}{9}$. Así, como $\frac{18}{5}>\frac{19}{9}$, esto indica que el numerador tendrá un orden superior al del denominador y por tanto, el límite valdrá ∞ .

c) Diferencias de expresiones infinitas

Hay ocasiones en los que nos encontramos con límites formados por diferencias de expresiones infinitas (Indeterminaciones del tipo $\infty-\infty$). En la mayoría de los casos esto ocurre porque hay una diferencia de dos expresiones polinómicas del tipo $5x^3-3x^2$, en los que se puede aplicar el mismo razonamiento que antes, es decir, identificar los órdenes de cada expresión y quedarse con la de mayor orden. De la misma forma se puede razonar con expresiones como las siguientes:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\left(2^x+1\right)-\frac{x^7-5x^2+1}{-x+3x^2}\right) \qquad \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^6+1}{x+1}-\frac{x^7-5x^2+1}{-x+3}\right)=-\infty$$

(En el primer caso, la expresión (2^x+1) forma un infinito de grado superior al de la expresión segunda que es polinómica de grado 6. En el segundo ejemplo, se ve que el orden del primer elemento de la diferencia es 5, mientras que el del segundo término es 6, por lo que mandará el segundo término).

En otras ocasiones encontraremos que no es fácil hacer esta comparación por ejemplo, porque tienen el mismo orden. En el ejemplo siguiente se puede apreciar:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x^6+1}{x+1}-\frac{4x^6-5x^2+1}{3x+3}\right)$$

(En este caso, se ve que tienen el mismo orden, por lo que estamos en un caso de indeterminación)

En los casos como el indicado anteriormente, la mejor forma de proceder es intentando efectuar la operación que se pueda (en este caso, se puede reducir a común denominador y dejarlo todo en una sola fracción, con lo que se termina el problema).

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x^6+1}{x+1}-\frac{4x^6-5x^2+1}{3x+3}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{6x^6+3-4x^6+5x^2-1}{3x+3}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x^6+2+5x^2}{3x+3}\right)=\infty$$

Hay otra forma de llegar a una indeterminación del tipo $\infty-\infty$, que es con una diferencia en la que uno o los dos elementos que se restan están afectados por raíces:

$$\lim_{x\to\infty}\left(2x-\sqrt{2x^2+x}\right)$$

En estos casos, la solución pasa por eliminar la diferencia y transformarla en una división, multiplicando y dividiendo por el conjugado:

$$\lim_{x\to\infty}\left(2x-\sqrt{2x^2+x}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(2x-\sqrt{2x^2+x}\right)\left(2x+\sqrt{2x^2+x}\right)}{\left(2x+\sqrt{2x^2+x}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{4x^2-\left(2x^2+x\right)}{\left(2x+\sqrt{2x^2+x}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{4x^2-2x^2-x}{\left(2x+\sqrt{2x^2+x}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-x}{2x+\sqrt{2x^2+x}}=\infty$$

d) Límite de una potencia

Se calcula sustituyendo por el valor. Puede dar indeterminaciones del tipo 1^∞, 0^0 o ∞^0. El primero de los casos se explica cómo resolverlo a continuación. Para los otros dos casos habrá que utilizar las propiedades de los logaritmos. Los estudiaremos más adelante.

e) Límite de una función cuando $x\to-\infty$

Para realizar el cálculo de un límite de una función cuando nos acercamos a $-\infty$, basta con tener en cuenta que $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty} f(-x)$, por lo que cada vez que tengamos un $\lim_{x\to-\infty}$ de una función $f(x)$, lo que haremos será cambiar $f(x)$ por $f(-x)$ y calculamos entonces su $\lim_{x\to\infty}$. Vamos a verlo en un ejemplo:

Calcular $\lim_{x\to-\infty}\dfrac{x^3-2x+1}{x^2-5x}$.

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3-2x+1}{x^2-5x}=\lim_{x\to\infty}\frac{(-x)^3-2(-x)+1}{(-x)^2-5(-x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{-x^3+2x+1}{x^2+5x}=-\infty$$

INDETERMINACIÓN $\frac{0}{0}$

Cuando solamente aparecen funciones racionales basta con descomponer factorialmente numerador y denominador.

Ejemplo.-

Calcula el siguiente límite: $\lim_{x\to 2}\left(\frac{x^2-5x+6}{x^2+3x-10}\right)$ indeterminación $\frac{0}{0}$

Para resolverla descomponemos factorialmente numerador y denominador (Factor común, productos notables o factorizar).

$$\left(\frac{x^2-5x+6}{x^2+3x-10}\right)=\frac{(x-3).(x-2)}{(x+5).(x-2)}=\frac{x-3}{x+5}$$ en consecuencia:

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{x^2-5x+6}{x^2+3x-10}\right)=\lim_{x\to 2}\left(\frac{x-3}{x+5}\right)=\frac{-1}{7}$$

En aquellos casos en los que aparecen radicales, basta con multiplicar y dividir por la expresión radical conjugada.

Ejemplo.-

Calcula el siguiente límite: $\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{1-\sqrt{x}}$ indeterminación $\frac{0}{0}$

Para resolverla multiplicamos numerador y denominador por $1+\sqrt{x}$.

$$\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{1-\sqrt{x}}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1).(1+\sqrt{x})}{(1-\sqrt{x}).(1+\sqrt{x})}=\lim_{x\to 1}\frac{-(1-x).(1+\sqrt{x})}{(1-x)}=$$
$$\lim_{x\to 1}(-1-\sqrt{x})=-1-1=-2$$

INDETERMINACIÓN $\infty-\infty$

En la mayoría de los casos basta con efectuar las operaciones indicadas.

Ejemplo.-

Calcula el siguiente límite: $\lim_{x\to 1}\left(\frac{x+1}{x-1}-\frac{x^2}{x^2-1}\right)$ indeterminación $\infty-\infty$

Para resolverla efectuamos la operación indicada entre paréntesis:

$$\left(\frac{x+1}{x-1}-\frac{x^2}{x^2-1}\right)=\left(\frac{(x+1).(x+1)-x^2}{x^2-1}\right)=\left(\frac{x^2+2x+1-x^2}{x^2-1}\right)=\left(\frac{2x+1}{x^2-1}\right)$$

Por tanto se cumple que: $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{x+1}{x-1}-\frac{x^2}{x^2-1}\right)=\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{2x+1}{x^2-1}\right)=\begin{cases}+\infty \; si \; x\to 1^+\\ -\infty \; si \; x\to 1^-\end{cases}$

En otros casos, sobre todo aquellos en que aparecen radicales, basta multiplicar y dividir por la expresión radical conjugada.

Ejemplo.

Calcula el siguiente límite: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x-\sqrt{x}\right)$ indeterminación $\infty-\infty$

Para resolverla multiplicamos y dividimos la expresión dada por su conjugada.

$$\lim_{x\to\infty}\left(x-\sqrt{x}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{(x-\sqrt{x}).(x+\sqrt{x})}{(x+\sqrt{x})}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-x}{x+\sqrt{x}}=+\infty$$

Evidentemente el último límite es más infinito pues crece más rápidamente el numerador que el denominador.

INDETERMINACIÓN $0.\infty$

En la mayoría de los casos basta con efectuar las operaciones indicadas.

Ejemplo.-

Calcula el siguiente límite: $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{x^2}{x-1}.\frac{x+1}{x^2}\right)$ indeterminación $0.\infty$

Para resolverla efectuamos la operación indicada entre paréntesis:

$\left(\frac{x^2}{x-1}.\frac{x+1}{x^2}\right)=\left(\frac{x^2.(x+1)}{(x-1).x^2}\right)=\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$ y en consecuencia:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2}{x-1}.\frac{x+1}{x^2}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)=-1$$

INDETERMINACIÓN 1^{∞}

Existe una fórmula que permite evitar la indeterminación 1^{∞}.

Si el límite de la función f(x) es 1 y el de g(x) es ∞, tenemos la indeterminación 1^{∞} en el límite.

$$\lim_{x \to A} f(x)^{g(x)} = 1^{\infty}$$

En este caso, aplicamos la siguiente fórmula:

$$\lim_{x \to A} f(x)^{g(x)} = \lim_{x \to A} e^{g(x) \cdot (f(x) - 1)}$$