MATEMÁTICAS

2º BACHILLERATO

TEMA 4: Geometría

PROBLEMAS DE SELECTIVIDAD. BLOQUE GEOMETRÍA

1. En el espacio se dan las rectas

$$r:\begin{cases} x = 3+\lambda \\ y = -1+2\lambda \\ z = 2+\lambda \end{cases} \qquad y \qquad s:\begin{cases} x+2y-1=0 \\ 3y-z+2+\alpha=0 \end{cases}$$

Obtener **razonadamente**:

a) El valor α para el que las rectas *r* y *s* están contenidas en un plano. *(4 puntos)*

b) La ecuación del plano que contiene a las rectas *r* y *s* para el valor de α obtenido en el apartado anterior. *(2 puntos)*

c) La ecuación del plano perpendicular a la recta *r* que contiene el punto (1, 2, 1). *(4 puntos)*

(SEPTIEMBRE 2011)

2. Se da la recta

$$r:\begin{cases} x-4y=0 \\ y-z=0 \end{cases} \qquad \pi_\alpha:(2+2\alpha)x+y+\alpha z-2-6\alpha=0$$

Obtener razonadamente:

a) La ecuación del plano π_α que pasa por el punto (1 , 1 , 0). *(3 puntos)*

b) La ecuación del plano π_α que es paralelo a la recta *r* . *(4 puntos)*

c) La ecuación del plano π_α que es perpendicular a la recta *r* *(3 puntos)*.

(SEPTIEMBRE 2011)

3. En el espacio se dan las rectas

$$r:\begin{cases} x+z=2 \\ 2x-y+z=0 \end{cases} \qquad y \qquad s:\begin{cases} 2x-y=3 \\ x-y-z=2 \end{cases}$$

Obtener **razonadamente**:

a) Un punto y un vector director de cada recta. *(3 puntos)*

b) La posición relativa de las rectas *r* y *s*. *(4 puntos)*

c) Determinar la ecuación del plano que contiene a *r* y es paralelo a *s*. *(3 puntos)*

(JUNIO 2011)

4. En el espacio se dan las rectas

$$r:\begin{cases} x=\lambda \\ y=1-\lambda \\ z=3 \end{cases} \quad y \quad s:\{x-1=y=z-3$$

Obtener **razonadamente**:

a) Un vector director de cada una de las rectas. *(2 puntos)*

b) La ecuación del plano perpendicular a la recta r que pasa por el punto (0,1,3). *(3 puntos)*

c) El punto de intersección de las rectas r y s *(2 puntos)* y la ecuación del plano *π* que contiene a estas rectas *r y s (3 puntos)*.

(JUNIO 2011)

5. Se pide obtener razonadamente:

a) La ecuación del plano π que pasa por los puntos O = (0, 0, 0), A = (6, − 3, 0) y B = (3, 0, 1). *(3 puntos)*

b) La ecuación de la recta r que pasa por el punto P = (8, 7, − 2) y es perpendicular al plano π. *(3 puntos)*

c) El punto Q del plano π cuya distancia al punto P es menor que la distancia de cualquier otro punto del plano π al punto P. *(4 puntos)*

(SEPTIEMBRE 2010)

6. Dadas las dos rectas r y s de ecuaciones

$$r:\frac{x-4}{3}=\frac{y-4}{2}=z-4 \qquad y \qquad s:x=\frac{y}{2}=\frac{z}{3}.$$

se pide calcular razonadamente:

a) Las coordenadas del punto P de intersección de las rectas r y s. *(3 puntos)*

b) El ángulo que forman las rectas r y s. *(3 puntos)*

c) Ecuación implícita A x + B y + C z + D = 0 del plano π que contiene a las rectas r y s. *(4 puntos)*

(SEPTIEMBRE 2010)

7. Dadas las rectas de ecuaciones

$$r:\begin{cases} 5x+y-z=4 \\ 2x-2y-z=-5 \end{cases} \qquad y \qquad s:\begin{cases} x-y=-5 \\ z=4 \end{cases}$$

se pide:

a) Justificar que las rectas r y s se cruzan. *(4 puntos)*

b) Calcular razonadamente la distancia entre las rectas r y s. *(3 puntos)*

c) Determinar la ecuación del plano π que es paralelo y equidistante a las rectas r y s. *(3 puntos)*

(JUNIO 2010)

8. Sea r la recta de vector director (2, − 1 , 1) que pasa por el punto P = (0, 3, − 1). Se pide:

a) Hallar razonadamente la distancia del punto A = (0, 1, 0) a la recta r. *(4 puntos)*

b) Calcular razonadamente el ángulo que forma la recta que pasa por los puntos P y A con la recta r en el punto P. *(4 puntos)*

c) Si Q es el punto donde la recta r corta al plano de ecuación z = 0, comprobar que el triángulo de vértices APQ tiene ángulos iguales en los vértices P y Q. *(2 puntos)*

(JUNIO 2010)

9. Dados los puntos P = (3, − 1, 4) y *Q* = (1, 0, − 1) , y el plano π de ecuación π: x − 2y + 2z + 5 = 0, se pide calcular razonadamente:

a) La ecuación de la recta **r** que pasa por el punto *P* y es perpendicular al plano π. (*1,4 puntos*).

b) La ecuación de los planos que pasan por el punto *P* y son perpendiculares al plano π. (*1 punto*).

c) La ecuación del plano π' que pasa por los puntos *P* y *Q* y es perpendicular al plano π. (*0,9 puntos*).

(SEPTIEMBRE 2009)

10. Sea π el plano de ecuación π: 3x + 2y + 4z − 12 = 0, se pide calcular razonadamente:

a) Las ecuaciones de los dos planos paralelos a π que distan 5 unidades de π. (*1,2 puntos*).

b) Los tres puntos *A*, *B* y *C*, intersección del plano π con cada uno de los tres ejes coordenados. (*0,6 puntos*).

c) Los tres ángulos del triángulo *ABC*. (*1,5 puntos*).

(SEPTIEMBRE 2009)

11. Sean A, B y C los puntos de intersección del plano de ecuación x + 4y − 2z − 4 = 0 con los tres ejes coordenados OX, OY y OZ, respectivamente. Se pide calcular razonadamente:

a) El área del triángulo ABC. *(1,1 puntos)*.

b) El perímetro del triángulo ABC. *(1,1 puntos)*.

c) Los tres ángulos interiores del triángulo ABC. *(1,1 puntos)*.

(JUNIO 2009)

12. Dados los puntos O = (0,0,0), A = (4,4,0) y P = (0,0,12), se pide obtener razonadamente:

a) La ecuación de la recta que pasa por A y es perpendicular al plano de ecuación z = 0. *(1 punto)*.

b) La ecuación de un plano que cumpla las dos condiciones siguientes:

- Pase por P y por un punto Q de la recta de ecuación x = y = 4
- Sea perpendicular a la recta que pasa por O y Q. *(2,3 puntos por hallar uno de los dos planos solución)*.

(JUNIO 2009)

13. Dados los planos **π_1**: x + y + z = 3 y **π_2**: x + y − αz = 0, se pide calcular razonadamente:

a) El valor de α para que los planos **π_1** y **π_2** sean perpendiculares y, para este valor de α, obtener las ecuaciones paramétricas de la recta intersección de estos dos planos. *(1,5 puntos)*.

b) El valor de α para que los planos **π_1** y **π_2** sean paralelos y, para este valor de α, obtener la distancia entre los dos planos **π_1** y **π_2**. *(1,8 puntos)*.

(SEPTIEMBRE 2008)

14. Dados el punto O = (0 , 0 , 0) y el plano **π**: x + y + z = 6, se pide calcular razonadamente:

a) La ecuación de la recta **r** que pasa por O y es perpendicular al plano **π**. *(1,1 puntos)*.

b) Las coordenadas del punto simétrico de O respecto del plano **π**. *(1,1 puntos)*.

c) La ecuación del plano que contiene al eje X y a la recta **r**. *(1,1 puntos)*.

(SEPTIEMBRE 2008)

15. Se dan los puntos A = (2 , 1 , 1) y B = (1 , 0 , − 1), y la recta **r** de ecuación

$$r: x-5 = y = \frac{z+2}{-2}$$

Se pide calcular razonadamente:

a) El punto *C* de **r** que equidista de A y B. *(2 puntos)*.

b) El área del triángulo ABC. *(1,3 puntos)*.

(JUNIO 2008)

16. Dadas la recta **r**, intersección de los planos y + z = 0 y x − 2 y − 1 = 0, y la recta **s** de ecuación

$s: \frac{x}{2} = y-1 = -z+3$, se pide

a) Obtener, razonadamente, las ecuaciones paramétricas de **r** y **s**. *(1,1 puntos)*.

b) Explicar de un modo razonado cuál es la posición relativa de las rectas **r** y **s**. *(1,1 puntos)*.

c) Calcular la distancia entre las rectas **r** y **s**. *(1,1 puntos)*.

(JUNIO 2008)

17. Dado el plano $2x + y + 3z - 1 = 0$ y el punto $Q = (2,1,3)$, se pide calcular :

a) La distancia del punto Q π al plano . (*1,1 puntos*).

b) El área del triángulo Δ cuyos vértices P_1, P_2 y P_3 son los puntos de intersección del plano π con los ejes coordenados. (*1,1 puntos*).

c) El volumen del tetraedro de vértices P_1, P_2, P_3 y Q. (*1,1 puntos*).

(SEPTIEMBRE 2007)

18. Dados los planos π_1 y π_2 de ecuaciones

$\pi_1: x+2y+z+3=0$; $\pi_2: 2x+y-z-6=0$, se pide:

a) Calcular el ángulo α que forman los planos π_1 y π_2

b) Calcular la ecuación paramétrica de la recta **r**, intersección de los planos π_1 y π_2

(SEPTIEMBRE 2007)

19. Dadas las dos rectas **r** y **s**, que se cortan, de ecuaciones

$r: \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{2y-1}{-6} = \dfrac{2z-3}{6}$ y $s: \dfrac{x-3}{-2} = \dfrac{2y+3}{2} = \dfrac{z-1}{4}$, se pide calcular:

a) El punto P de corte de las rectas **r** y **s**. *(1,1 puntos)*.

b) Un vector direccional de **r** y otro de **s** , *(0,5 puntos)*, y el ángulo α que forman las rectas **r** y **s** en el punto de corte P. *(0,6 puntos)*.

c) La ecuación implícita $a\,x + b\,y + c\,z + d = 0$ del plano π que contiene a las rectas **r** y **s** *(1,1 puntos)*.

(JUNIO 2007)

20. Dados el punto $Q = (3, -1, 4)$ y la recta **r** de ecuación paramétrica

r: $x = -2 + 3\lambda$, $y = -2\lambda$, $z = 1 + 4\lambda$, se pide:

a) Hallar la distancia del punto Q a la recta **r**. *(1,1 puntos)*.

b) Justificar que la recta **s** que pasa por Q y tiene a (1, −1, 1) como vector direccional no corta a **r**. *(1,1 puntos)*.

c) Calcular la distancia entre las rectas **r** y **s**. *(1,1 puntos)*.

(JUNIO 2007)

En el espacio se consideran:
La recta ***r*** intersección de los planos de ecuaciones implícitas $2x - 2y - z = 9$ y $4x - y + z = 42$.
Y la recta ***s*** que pasa por los puntos (1,3,-4) y (3,-5,-2). Se pide:
Calcular las ecuaciones paramétricas de la recta ***r*** **(0,8 puntos)** y de la recta ***s*** **(0,3 puntos)**.
Justificar que las rectas ***r*** y ***s*** se cruzan **(0,8 puntos)**.
Calcular un vector direccional de la recta ***t***, perpendicular común a las rectas ***r*** y ***s***, **(0,4 puntos)** y **calcular** el punto *P* de intersección de las rectas ***s*** y ***t*** **(1 punto)**.

(SEPTIEMBRE 2006)

En el espacio se consideran:
El plano **π** que pasa por los puntos (11, 1, 2), (5, 7, 5) y (7, -1, -2).
Y la recta ***r*** intersección de los planos de ecuaciones implícitas $x + y + z = 15$ y $2x - 7y + 2z = 3$.
Calcular la ecuación paramétrica de ***r*** **(0,6 puntos)** y la ecuación implícita del plano **π** **(0,4 puntos)**.
Calcular el punto *P* intersección de ***r*** y **π** **(0,8 puntos)** y el ángulo **α** que determinan ***r*** y **π** **(0,5 puntos)**.
Calcular los puntos *M* y *N* de la recta ***r*** cuya distancia al plano **π** es igual a 3 u.l. **(1 punto)**.

(SEPTIEMBRE 2006)

21. En el espacio se consideran:
La recta r intersección de dos planos de ecuaciones implícitas: $x + y - z = 5$ y $2x + y - 2z = 2$.
Y la recta s que pasa por los puntos P = (3, 10, 5) y Q = (5, 12, 6). Se pide:

a) Calcular las ecuaciones paramétricas de la recta r *(0,6 puntos)* y de la recta s *(0,4 puntos)*.

b) Calcular el punto H intersección de r y s *(0,6 puntos)* y el ángulo que determinan r y s *(0,4 puntos)*.

c) Calcular los puntos M y N de la recta r para los que el área de cada uno de los triángulos de vértices PQM y PQN es 3 unidades de área *(1,3 puntos)*.

(JUNIO 2006)

24. Dados los puntos A = (4, -4, 9); B = (2, 0, 5); C = (4, 2, 6); L = (1, 1, 4); M = (0, 2, 3); y N = (3, 0, 5), se pide:
Calcular la distancia d del punto C al punto medio del segmento de extremos A, B *(0,5 puntos)* y el área S del triángulo de vértices A, B, C *(1 punto)*.
Calcular las ecuaciones implícitas del plano π que pasa por los puntos A, B, C *(0,4 puntos)* y del plano π′ que pasa por los puntos L, M, N *(1 punto)*.
Calcular la ecuación paramétrica de la recta r intersección de los planos π y π′ *(0,6 puntos)* y el ángulo α que determinan los planos π y π′ *(0,4 puntos)*

(JUNIO 2006)

25. Un paralelepípedo rectangular (u ortoedro) tiene tres de sus aristas sobre las rectas:

$l:\begin{cases}x=0\\y=0\end{cases}$, $m:\begin{cases}x-2y=0\\z=0\end{cases}$ y $n:\begin{cases}2x+y=0\\z=0\end{cases}$, y uno de sus vértices es (12, 21, -11). Se pide:

a) Hallar los vértices restantes *(2,5 puntos)*. b) Calcular su volumen *(0,8 puntos)*.

(SEPTIEMBRE 2005)

26. Dados los planos 5 x − y − z = 0 , : x + y − z = 0 y el punto P (9, 4, -1), determinar:

a) La ecuación del plano que pasa por P y es perpendicular a y a *(1,5 puntos)*.

b) El punto simétrico de P respecto de la recta r, intersección de los planos y *(1,8 puntos)*.

(SEPTIEMBRE 2005)

27. Se considera el plano $\pi : y + z - 12\,m = 0$ (m parámetro real) y la rectas

$$u:\begin{cases}x=1\\y=z\end{cases},\quad v:\begin{cases}x=2\\y=2z\end{cases},\quad w:\begin{cases}x=3\\y=3z\end{cases}.$$

Sean A, B y C los puntos de intersección de π con u, v y w, respectivamente

a) Calcular las coordenadas de A, B y C en función de m *(1,8 puntos)*

b) Hallar los valores de m para los que el área del triángulo ABC es 1 u.a. *(1,5 puntos)*

(JUNIO 2005)

28. Hallar las ecuaciones de los planos que pasan por el punto (-7, 2, -3) y tales que las proyecciones perpendiculares del origen sobre dichos planos son puntos de la recta $(x,y,z)=(0,4,1)+t(1,0,0)$ (*3,3 puntos*).

(JUNIO 2005)

29. a) Obtener el plano que pasa por el punto P(-2,4,-3) y es perpendicular a la recta $r:(x,y,z)=(1,2,0)+t(1,-2,1)$ (*1 punto*).

b) Calcular la distancia entre el punto P y la recta r (*2,3 puntos*).

(SEPTIEMBRE 2004)

30. Consideramos los puntos: A = (1, 0, 0), B = (0,1,0), C = (0,0,1) y D = (2,1,2). Se pide

a) Hallar el área del triángulo de vértices B, C y D (*1,1 puntos*).

b) Calcular el volumen del tetraedro de vértices A, B, C y D (*1,1 puntos*).

c) Hallar la distancia del punto A al plano que pasa por los puntos B, C y D (*1,1 puntos*).

(JUNIO 2004)

32. Se consideran la recta r: $(x, y, z) = (t + 1, 2t, 3t)$, el plano π: $x - 2y - z = 0$ y el punto $P = (1, 1, 1)$. Se pide

a) Determinar la ecuación del plano π_1 que pasa por el punto P y es paralelo al plano π (*0,9 puntos*).

b) Determinar la ecuación del plano π_2 que contiene a la recta r y pasa por el punto P (*1,2 puntos*).

c) Calcular la ecuación paramétrica de la recta intersección de los planos anteriores, π_1 y π_2 (*1,2 puntos*).

(JUNIO 2004)

33. En el espacio , se consideran el punto $P = (3,2,3)$ y la recta r intersección de los planos de ecuaciones: $x + 3y - 4z = 0$ y $x + 2y - 2z = 1$. Se pide determinar:

a) La distancia *d* del punto P a la recta r (*1,3 puntos*).

b) Los puntos M y N de la recta r que cumplan que su distancia al punto P es $\sqrt{5}\,d$ (*2,3 puntos*).

(SEPTIEMBRE 2003)

34. Sean π y π' los planos del $\mathbb{R}^3$ espacio , determinados del modo siguiente: el plano π pasa por los puntos (0,2,1), (3,-1,1) y (1,-1,5) y el plano π´ pasa por los puntos (3,0,2), (2,1,1) y (5,4,-2). Se pide calcular:

a) Una ecuación paramétrica de la recta *r* intersección de los planos π y π´ (*1,3 puntos*).

b) El ángulo α que forman los planos π y π´ (*0,7 puntos*).

c) La ecuación del plano que contiene a la recta *r* y forma un ángulo de 90 grados con el plano π (*1,3 puntos*).

(SEPTIEMBRE 2003)

35. Sean *r* y *r´* las rectas del espacio $\Re^3$, determinadas del modo siguiente:

r pasa por los puntos A = (3,6,7) y B = (7,8,3) y *r´* es la recta de intersección de los planos de ecuaciones: x-4y-z=-10 y 3x-4y+z=-2. Se pide:

a) Calcular de cada una de las rectas *r* y *r´* una ecuación paramétrica y determinar la posición relativa de ambas (*1 punto*).

b) Calcular la distancia *d* entre las rectas *r* y *r´ (1,3 puntos).*

c) Calcular el área del triángulo de vértices A, B y C, siendo C un punto cualquiera de la recta *r´ (1 punto).*

(JUNIO 2003)

36. Sean *r* la recta y π el plano de $\Re^3$, determinados del siguiente modo:

r pasa por los puntos (2,2,4) y (-1,2,1) y el plano π pasa por los puntos (1,0,1), (1,- 1,0) y (3,0,0). Se pide:

a) Probar que la recta *r* no es paralela a π (*1 punto*).

b) Calcular el punto *P* de intersección de *r* y π y el ángulo que forman la recta *r* y el plano π (*1 punto*).

c) Determinar los puntos *S* y *T* de la recta *r* que cumplan que su distancia a π sea 4 (*1,3 puntos*).

(SEPTIEMBRE 2002)

37. Dado el plano definido por $\pi:\ 8x-4y+z=3$, la ecuación hallar

a) La ecuación de la recta perpendicular al plano que pasa por el punto P(1,-3,7), expresada como la intersección de dos planos. (*1 punto*)

b) La distancia del punto P al plano π

c) Las ecuaciones de los planos que distan 3 unidades del plano π. (*1,5 puntos*)

(SEPTIEMBRE 2002)

38. Dados los puntos A=(1,-2,3) y B=(0,2,1), se pide:

a) La ecuación paramétrica de la recta que pasa por ambos puntos.

(1,1 puntos)

b) La ecuación de π plano que está a igual distancia de A y de B. *(1,1 puntos)*

c) La distancia al origen de la recta intersección del π plano 2y-z=0 con el plano del apartado b). *(1,1 puntos)*

(JUNIO 2002)

a) Hallar la distancia del punto P=(3,-1,4) a la recta r intersección de los planos: (*1,8 puntos*)

$$\pi_1: \; 2x+y-z+5=0$$

$$\pi_2: \; 4x+4y-z+9=0$$

b) Hallar la ecuación del plano que pasa por la recta r y el punto P. (*1,5 puntos*)